М.К.Кравцов, доктор физико-математических наук
Белорусский НИИ экономики и информации АПК

УДК 519.10

Многокритериальная модель перевозок сельскохозяйственных грузов

Разработаны и апробированы экономико-математические модели (как в однокритериальной, так и многокритериальной постановках) для задачи перевозок сельскохозяйственных грузов. Исследована вычислительная сложность многокритериальной задачи и возможность применения линейной свертки критериев (ЛСК) для нахождения ее парето-оптимальных решений. В частности, предложен полиномиальный алгоритм сведения любой многокритериальной задачи с одним линейным критерием и несколькими критериями "узкого места" к эквивалентной задаче (с тем же паретовским множеством), разрешимой с помощью ЛСК.

Economical and mathematical models both one criterium and multy criteriums was elaborated to decide the task of transformation of the agricultural cargos. Calculated difficulty of the multicriterium task and possibility of its linear criterias application to finding of optimal decisions was researched. Polinominal algoritm transformation of any of multycriterium task with one linear criterion and some criterions MINMAX type to equivalented task decided by means of linear criteriums was suggested.

Важную роль в повышении эффективности перевозочного процесса играет задача определения оптимальных маршрутов движения транспортных средств, осуществляющих перевозку сельскохозяйственных грузов (молока, кормов, скота и др.). Эта задача, как, впрочем, и любая другая реальная задача, по своей природе является многокритериальной, т.е. требует выбора наилучшего решения (альтернативы) из множества всех допустимых решений с учетом нескольких критериев. Эти критерии, как правило, противоречивы и разнородны в том смысле, что качество сравниваемых альтернатив не всегда возможно адекватно выразить одним комплексным или интегральным критерием, представляющим собой некоторую свертку исходных (частных) критериев. Это означает, что аппарат классической (т.е. однокритериальной) оптимизации становится недостаточным для нахождения и принятия экономически обоснованных решений. Поэтому разработка многокритериальных моделей и методов, дающих возможность не только решать конкретные оптимизационные задачи, но и располагающих программными средствами моделирования подобных задач, представляется весьма перспективной.

Одним из основных понятий теории многокритериальной оптимизации является понятие парето-оптимального решения. Оно представляет собой обобщение понятия точки минимума (или максимума) числовой функции на случай нескольких функций: решение парето-оптимально, если значение любого из критериев можно улучшить лишь за счет ухудшения значений остальных критериев (хотя бы одного). Активно развивающаяся в последние годы теория многокритериальной оптимизации посвящена исследованию качественных и количественных характеристик паретовского множества, состоящего из парето-оптимальных решений (см., например, [1-5]).

В настоящей статье разработаны и апробированы экономико-математические модели (как в однокритериальной, так и в многокритериальной постановках) для задачи перевозок сельскохозяйственных грузов. Исследована вычислительная сложность многокритериальной задачи и возможность применения линейной свертки критериев (ЛСК) для нахождения ее парето-оптимальных решений. В частности, предложен полиномиальный алгоритм сведения любой многокритериальной задачи с одним линейным критерием и несколькими критериями вида MINMAX (критерий “узкого места”) к эквивалентной задаче (с тем же паретовским множеством), разрешимой с помощью ЛСК.

1. **Постановка задачи.** Автотранспортное предприятие ежедневно выделяет несколько молоковозов для перевозки молока с m объектов (ферм) на молокозавод и отходов от переработки молока (обрат) с молокозавода на эти объекты. Обрат загружается в молоковозы на молокозаводе и развозится по объектам с последующим сбором молока с этих объектов и доставкой его на молокозавод. Развозка обрата осуществляется в один прием (утром), а сбор молока – в два приема (утром и вечером), причем каждый объект обслуживается только одним молоковозом. Вообще же молоковоз, как правило, обслуживает два объекта и может одновременно взять молоко (обрат) с (для)

этих объектов – грузоподъемность молоковоза для этого достаточна.

Будем предполагать, что все операции по доставке груза могут быть осуществлены в течение некоторого периода времени, устраивающего всех заказчиков.

Молоковоз может объезжать только объекты, принадлежащие одному маршруту. Разумеется, один и тот же объект может находиться на разных маршрутах. Под маршрутом будем понимать любую допустимую комбинацию выполнения заказов объектов одним молоковозом. Для задачи перевозок молока и обрата существует множество допустимых маршрутов, каждый из которых позволяет обслужить определенные объекты и требует использования в течение дня одного молоковоза. Каждый маршрут характеризуется определенными затратами, которые могут соответствовать его длине, стоимости перевозок, расходу топлива и т.д. Требуется составить план перевозок молока и обрата, т.е. выбрать такое множество маршрутов, при котором обеспечивается обслуживание всех объектов и, кроме того, суммарные затраты минимальны.

2. **Математические модели задачи**. Переведем задачу на математический язык. Пусть для задачи перевозок молока и обрата составлена матрица $A=||a_{sj}||$ m×n всевозможных маршрутов, состоящая из нулей и единиц. Каждый столбец этой матрицы представляет собой маршрут, т.е. $a_{sj}=1$, если объект s обслуживается по маршруту j, и $a_{sj}=0$ в противном случае. Будем считать, что в матрице A отсутствуют столбцы, состоящие сплошь из нулей (наличие таких столбцов свидетельствовало бы о существовании маршрутов, на которых нет ни одного объекта). Пусть, кроме того, для каждого маршрута j найдены соответствующие ему затраты C_j, j=1,2,...,n. Теперь задача состоит в выборе наиболее экономичной комбинации этих маршрутов.

Введем переменные

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{ если j-й маршрут реализуется.} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда наша задача сведется к минимизации суммарных затрат

$$\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{sj} x_j = 1, \quad s = 1,2,\dots,m, \qquad (2)$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,2,\dots,n. \qquad (3)$$

Условие (2) означает, что все объекты должны быть обслужены.

Задача перевозок молока и обрата может содержать и ограничение вида

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le t, \qquad (4)$$

которое определяет максимально возможное число выбираемых маршрутов (если, например, автотранспортное предприятие ежедневно может выпускать на линию не более t молоковозов).

В ряде задач организации перевозок качество плана оценивается максимальным временем, затраченным на перевозки. Пусть нам задано время t_j, необходимое на перевозку молока и обрата по маршруту j, j=1,2,...,n. Требуется найти такой план перевозок, для которого время наиболее продолжительной перевозки будет минимальным, т.е. критерий (1) заменяется на критерий

$$\max\{t_j \operatorname{sign} x_j : j = 1,2,\dots,n\} \to \min, \qquad (5)$$

где

$$\operatorname{sign} x_j = \begin{cases} 1, \text{ если } x_j > 0, \\ 0, \text{ если } x_j = 0. \end{cases}$$

Таким образом, решая задачу (2)-(5), находим план, самая продолжительная перевозка которого имеет минимальную длительность.

Множество всех векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющих условиям (2)-(4), будем обозначать через X. Нетрудно проверить, что X≠∅ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\exists N \subseteq \{1,2,\dots,n\}: \sum_{j \in N} a_{sj} = 1, \; s = 1,2,\dots,m. \qquad (6)$$

В дальнейшем будем считать, что матрица A удовлетворяет условию (6).

В многокритериальной задаче перевозок молока и обрата требуется оценить качество выбираемых маршрутов по нескольким критериям (например, по общей стоимости перевозок, расходу топлива, общему пробегу, времени доставки всех грузов и т.д.). Многокритериальная модель этой задачи предполагает, что на множестве X определена векторная целевая функция (ВЦФ)

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)), \; r \ge 2, \qquad (7)$$
$$f_i(x) \to \min_X, \; i = 1,2,\dots,r$$

с частными критериями двух видов:

$$\text{MINSUM} \;\; f_i(x) = S(C^i, x) = \sum_{j=1}^{n} C_j^i x_j \to \min_X \qquad (8)$$

(линейный или стоимостный критерий),

$$\text{MINMAX} \;\; f_i(x) = M(C^i, x) = \max\{C_j^i \operatorname{sign} x_j : j = 1,2,\dots,n\} \to \min_X \qquad (9)$$

(критерий “узкого места” или времени). Здесь $C^i = (C_1^i, C_2^i, \dots, C_n^i)$, C_j^i – заданные неотрицательные числа, характеризующие маршрут j по i-му критерию. Такую задачу будем обозначать через (X,f).

Говоря о r-критериальной задаче (X,f), будем подразумевать задачу нахождения паретовского множества:

$$P(X,f) = \{x \in X : \exists x' \in X : f(x) \geq f(x'), f(x) \neq f(x')\}.$$

В отличие от однокритериальных задач (1)-(4) и (2)-(5) многокритериальная задача (X,f) - более гибкая и адекватная реальности, поскольку позволяет оптимизировать несколько критериев одновременно.

Заметим, что к построенным моделям сводятся и другие задачи перевозок сельскохозяйственных грузов, например, кормов и скота.

Для решения задачи (1)-(4) использовался метод ветвей и границ [6] и метод Фора и Мальгранжа [6], а для задачи (2)-(5) – метод, предложенный в [7]. С использованием этих методов построены алгоритмы нахождения решения в задаче (X, f) с упорядоченной совокупностью критериев [7] и полного множества альтернатив в 2-критериальной задаче (X, f) в случае, когда ВЦФ содержит хотя бы один критерий вида MINMAX [5].

3. **Вычислительная сложность**. Следующая теорема характеризует сложность нахождения и представления в явном виде паретовского множества P (X,f) задачи (X,f).

Теорема 1. Пусть ВЦФ (7) содержит хотя бы два критерия вида MINSUM (8). Тогда существует r-критериальная задача (X,f), в которой паретовское множество P (X,f) совпадает с множеством допустимых решений X и среди этих решений нет эквивалентных.

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 1 из [4].

4. **Линейная свертка критериев**. В области многокритериальной оптимизации первые результаты относились к исследованию возможности применения различных приемов свертки частных критериев для нахождения парето-оптимальных решений (теоремы Карлина, Купманса, Гермейера и др. [8,9]). Один из простейших и наиболее распространенных приемов поиска парето-оптимальных решений в многокритериальной задаче основан на линейной свертке частных критериев. Однако этот прием не всегда гарантирует нахождение всех парето-оптимальных решений задачи. В таких случаях говорят о неразрешимости многокритериальной задачи с помощью ЛСК [1-3, 10]. В [11] доказано, что проблема нахождения множества лексикографических оптимумов, являющегося подмножеством паретовского множества, разрешима с помощью ЛСК в случае, когда множество допустимых решений конечно. Отсюда, в частности, вытекает утверждение о том, что всякий лексикографический оптимум в задаче (X,f) может быть найден с помощью ЛСК.

Будем говорить, что задача (X,f) разрешима с помощью ЛСК, если выполняется равенство

$$P(X,f) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_r} \Lambda(X,f,\lambda),$$

где

$$\Lambda_r = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) : \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1,\ \lambda_i > 0,\ i = 1,2,\ldots,r\},$$

$$\Lambda(X,f,\lambda) = \arg\min\{(\lambda, f(x)) : x \in X\},$$

$$(\lambda, f(x)) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i(x)$$

– линейная свертка частных критериев, (.,.) – скалярное произведение векторов, argmin {.} – множество всех оптимальных аргументов соответствующей задачи минимизации.

Прежде чем сформулировать признак разрешимости задачи (X,f), введем необходимые обозначения.

Для всякого i=1,2,...,r упорядочим по возрастанию все различные значения целевой функции $f_i(x)$ на множестве X:

$$f_i(x_1^i) < f_i(x_2^i) < \ldots < f_i(x_{m_i}^i),\ m_i \leq |X|.$$

Не нарушая общности, можно считать, что $m_i > 1$, i=1,2,...,r.

Далее для всякого i=1,2,...,r положим

$$\Delta_i(k,l) = f_i(x_k^i) - f_i(x_l^i),$$

$$\Theta_i = \min\{\Delta_i(h+1,h) : h = 1,2,\ldots,m_i - 1\},$$

$$\Omega_i = \max\{\Delta_h(m_h,1)/\Theta_h : h = 1,2,\ldots,i\}.$$

Через S_r будем обозначать множество всех перестановок чисел 1,2,...,r.

Из теоремы 2 [12] вытекает следующий признак разрешимости задачи (X,f) с помощью ЛСК.

Теорема 2. Для того, чтобы r-критериальная задача (X, f) была разрешима с помощью ЛСК, достаточно, чтобы для некоторой перестановки $(s_1, s_2, \ldots, s_r) \in S_r$ выполнялись неравенства

$$(r-1)(\Omega_{s_i-1}+1) f_{s_i}(x_{h+1}^{s_i}) < f_{s_i}(x_{h+2}^{s_i}),$$

$$i = 2,\ldots,r,\quad h = 1,2,\ldots,m_{s_i} - 2.$$

Замечание. Теорема 2 верна и для r-критериальной задачи перевозок, в которой ВЦФ (7) содержит любые другие критерии (не обязательно MINSUM (8) и MINMAX (9)).

В дальнейшем через (X,f*) будем обозначать r-критериальную задачу (X,f), для которой

$$f_1(x) = S(C^1, x),\ f_i(x) = M(C^i, x),\ i = 2,3,\ldots,r,$$

где $C^i \in Z_+^n,\ i = 1,2,\ldots,r.$

Упорядочим коэффициенты C_j^i целевой функции $f_i(x)$, i=2,3,...,r, в порядке не убывания их величин:

$$C_{j_1^i}^i \leq C_{j_2^i}^i \leq \ldots \leq C_{j_n^i}^i. \qquad (10)$$

Пусть $q = \min\{\sum_{j=1}^{n} \operatorname{sign} x_j : x \in X\}$.

Для любого i=2,3,...,r введем следующие обозначения:

$$s(i) = \max\{p \in \{1,2,\ldots,n\} : C_{j_p^i}^i < C_{j_n^i}^i\},$$

$$l(i,p) = \min\{t \in \{1,2,\ldots,n\} : C_{j_p^i}^i < C_{j_t^i}^i\},$$

$$\delta_i(k,l) = C^i_{j^i_k} - C^i_{j^i_l}, \quad k,l = 1,2,\ldots,n,$$

$$a_i = \min\{\delta_i(l(i,p),p): q \le p \le s(i)\}, \quad b_i = \delta_i(n,q).$$

Задачу (X,f*) будем называть регулярной (s-регулярной), если существует такая перестановка s=(s$_1$,s$_2$,..., s$_r$)∈S$_r$, s$_1$=1, для которой выполняются неравенства

$$(r-1)(1+\max\{b_{s_h}/a_{s_h}: h=1,2,\ldots,i-1\})\delta_{s_i}(p,q) < \delta_{s_i}(l(i,p),q),$$

$$i = 2,3,\ldots,r, \quad p = l(i,q), l(i,q)+1,\ldots,s(i),$$

где $0 < a_1 \le \Theta_1$, $b_1 \ge \Delta_1(m_1,1)$.

В силу очевидных включений

$$\{M(C^i,x): x \in X\} \subseteq \{C^i_{j^i_p}: q \le p \le n\},$$

справедливых для любого i=2,3,...,r, и теоремы 2 имеет место следующая

Теорема 3. Всякая регулярная задача (X,f*) разрешима с помощью ЛСК.

Используя теорему 3, построим алгоритм φ, сводящий любую задачу (X,f*) к регулярной задаче (X,g) того же порядка и с тем же паретовским множеством. Здесь $g(x) = (S(d^1,x), M(d^2,x),\ldots, M(d^r,x))$, где $d^i = (d^i_1, d^i_2,\ldots,d^i_n)$, d^i_j – коэффициенты, специальным образом построенные по C^i_j.

Алгоритм φ состоит из двух этапов.

Этап 1. Для любого i=2,3,...,r упорядочим коэффициенты C^i_j целевой функции $f_i(x)$ в порядке не убывания их величин (см. (10)).

Этап 2 состоит из r-1 шагов, причем на i-м шаге, i=1,2,...,r-1, строятся новые коэффициенты d^{i+1}_j, j=1,2,...,n. Каждый i-й шаг содержит n подшагов.

k-й подшаг i-го шага, 1 ≤ k ≤ n, 1 ≤ i ≤ r–1.

Если k ≤ l(i,q), то полагаем $d^{i+1}_{j^{i+1}_k} = C^{i+1}_{j^{i+1}_k}$.

Если l(i,q) < k ≤ n, то

$$d^{i+1}_{j^{i+1}_k} = \begin{cases} d^{i+1}_{j^{i+1}_{k-1}} \text{ при } \delta_{i+1}(k,k-1) = 0, \\ \Phi_{i+1}\delta'_{i+1}(k-1,q) + d^{i+1}_{j^{i+1}_q} + 1 \text{ при } \delta_{i+1}(k,k-1) > 0, \end{cases}$$

где

$$\Phi_{i+1} = (r-1)(1+\max\{b'_h/a'_h: h=1,2,\ldots,i\}), \quad a'_1 = a_1, \; b'_1 = b_1,$$

$$a'_i = \min\{\delta'_i(l(i,p),p): q \le p \le s(i)\}, \; b'_i = \delta'_i(n,q),$$

$$\delta'_i(p,l) = d^i_{j^i_p} - d^i_{j^i_l}.$$

Очевидно, что трудоемкость первого этапа алгоритма φ составляет O(r n log$_2$n), а второго этапа – O(rn) операций. Так как на оценку снизу величины a$_1$ и оценку сверху величины b$_1$ требуется O(n) операций, то трудоемкость алгоритма φ оценивается величиной O(r n log$_2$n). Легко видеть, что P(X,f*)=P(X,g) и задача (X,g) является (1,2,...,r) - регулярной. Поэтому, на основании теоремы 3, задача (X,g) разрешима с помощью ЛСК.

Итак, справедлива

Теорема 4. Алгоритм φ сводит задачу (X,f*) к эквивалентной задаче (X,g), разрешимой с помощью ЛСК, причем сложность алгоритма φ составляет O (r n log$_2$ n) операций.

5. **Результаты экспериментальных расчетов**. Проведенные машинные эксперименты на усеченной реальной информации по перевозке молока на Лидском межрайонном автотранспортном предприятии показали работоспособность предложенных моделей и методов, подтвердили экономический эффект, заключающийся в уменьшении суммарного пробега транспортных средств и, следовательно, в сокращении потребности в топливе (на 5% и более).

Литература

1. Емеличев В.А., Перепелица В.А. Сложность дискретных многокритериальных задач // Дискретная математика. – 1994. Т.6, вып. 1. – С.3-33.

2. Емеличев В.А., Кравцов М.К. О неразрешимости векторных задач дискретной оптимизации на системах подмножеств в классе алгоритмов линейной свертки критериев // Докл. РАН. – 1994. Т.334, № 1. – С.9-11.

3. Емеличев В.А., Кравцов М.К. О задачах векторной дискретной оптимизации на системах подмножеств, неразрешимых с помощью линейной свертки // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1994. Т.34, № 7. – С.1082-1094.

4. Емеличев В.А., Кравцов М.К. Полнота задач векторной дискретной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 1994, № 5. – С.75-83.

5. Емеличев В.А., Кравцов М.К. О комбинаторных задачах векторной оптимизации // Дискретная математика. – 1995. Т.7, вып. 1. – С.3-18.

6. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. – М.: Наука, 1969. – 368с.

7. Кравцов М.К., Шерман А.Х. О решении комбинаторных задач оптимизации с минимаксными критериями // Кибернетика. – 1989, №3. – С.71-77.

8. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 254с.

9. Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. – М.: Наука, 1986. – 295с.

10. Girlich E., Kovalev M.M., Kravzov M.K. K-Summen - und k-Produkt-Bottleneck-Vektoroptimierungsprobleme // Preprint / Otto-Von-Guericke-Universitat Magdeburg. – 1995. №20. – 16s.

11. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Янушкевич О.А. Лексикографические оптимумы многокритериальной задачи дискретной оптимизации // Математические заметки. – 1995. Т.58, вып. 3. – С.365-371.

12. Кравцов М.К., Янушкевич О.А. О многокритериальных задачах, разрешимых с помощью алгоритма линейной свертки критериев // Препринт / Минск: Ин-т техн. кибернетики АН Беларуси. – 1995. №16. – 16с.