М.К.Кравцов, *доктор физико-математических наук;*
А.П.Крачковский, *кандидат физико-математических наук*
Белорусский НИИ экономики и информации

УДК 631.153.7:519.711.3

Экономико-математические модели оптимального размещения сельскохозяйственных культур и выбора технологий их возделывания

Разработаны оптимизационные экономико-математические модели (как в однокритериальной, так и многокритериальной постановках) для задачи размещения сельскохозяйственных культур и выбора технологий их возделывания. Проведён математический анализ таких моделей, а для моделей, не имеющих решений (неразрешимых), предложены методы их коррекции.

Optimised economical and mathematical models (both one criterium and multy criteriums) for task of the crops placing and choising of the technologies of its planting were elaborated. The mathematical analysis of such a models have been done. It were suggested the methods of the correction for those which have not any decisions.

Одна из основных проблем, которую ставит перед собой аграрная наука, заключается в наиболее целесообразной организации использования имеющихся ограниченных ресурсов (природных, трудовых, материальных) для получения необходимого количества сельскохозяйственной продукции. Решение этой проблемы тесно связано с решением задачи оптимального размещения сельскохозяйственных культур и выбора технологий их возделывания. Оптимальное планирование в области сельскохозяйственного производства необходимо для:

– достижения заданных объемов производства продукции с минимальными затратами производственных ресурсов;

– определения наиболее целесообразного распределения производственных ресурсов (земли, труда, техники и т. д.) в целях получения максимального дохода производителей;

– эффективного управления производством в целях наилучшей организации производственных процессов при минимальных затратах труда, денежно-материальных средств и времени.

К настоящему времени разработанные экономико-математические модели для задачи размещения культур в простейшей постановке, т. е. без учета технологий их возделывания (см., например, [1-3]), несомненно, принесли свою пользу. Однако данные модели выявили и существенные трудности, возникающие при их анализе и внедрении в практику. Эти трудности связаны с качеством моделирования, которое обусловлено главным образом тем, что размещение культур проводится без учета технологий их возделывания.

В настоящей статье разработаны экономико-математические модели, на основе которых определяется оптимальный вариант размещения культур и выбора технологий их возделывания, обеспечивающий производство запланированных объёмов продукции (если, конечно, это возможно) и дающий максимальный доход производителям. Проведен математический анализ таких моделей, а для моделей, не имеющих решений (неразрешимых), предложены методы их коррекции по различным критериям.

1. Постановка задачи. Как известно, урожайность сельскохозяйственных культур зависит от трех основных групп факторов: плодородия земли, биологических свойств растений, технологии их возделывания . Для учета этих факторов при постановке и формализации задачи размещения сельскохозяйственных культур и выбора технологий их возделывания введем следующие количественные характеристики.

Пусть имеется q производителей сельскохозяйственной продукции, посевные площади которых равны соответственно $S_1, S_2, ..., S_q$ и пусть площадь S_p каждого производителя p, $p=1,2,...,q$ разбита на m_p, $m_p \geq 1$, земельных участков, т.е. $S_p = \sum_{j=1}^{m_p} S_{jp}$, где S_{jp} – площадь j-го участка у производителя p $(S_{jp} > 0)$. Каждый участок земли имеет свою качественную оценку. Различие почв определяет различную пригодность отдельных участков для выращивания тех или иных культур.

Будем считать, что на каждом земельном участке можно выращивать n видов культур и каждая культура требует использования l видов ресурса. Пусть a_{sijpk} – норма расхода s-го вида ресурса на производство единицы продукции i-й культуры на j-м участке у производителя p с применением k-й технологии возделывания. Под k-й технологией возделывания i-й культуры на j-ом участке у производителя p будем понимать вектор норм ресурсов на единицу площади $a'_{1ijpk}, a'_{2ijpk}, ..., a'_{lijpk}$, ориентированный на получение урожайности u_{ijpk}. Ясно, что $a_{sijpk} = a'_{sijpk} u_{ijpk}$, $s=1,2,...,l$. Обозначим через K_{ijp} множество всех технологий возделывания i-й культуры на j-м участке у производителя p. Если i-я культура на j-м участке у производителя p не возделывается, то, по определению, считаем, что $K_{ijp} = \varnothing$.

Пусть R_{sp} – объём s-го вида ресурса, имеющегося в наличии у производителя p. Объем продукции i-й культуры у каждого производителя p не может быть меньше запланированного объёма b_{ip} ($b_{ip} > 0$, $i=1,2,...,n$, $p=1,2,...,q$), включающего в себя госзаказ и собственные потребности на продукцию i-й культуры у производителя p.

Известны также общие затраты d_{ijpk} на производство единицы продукции i-й культуры на j-м участке у производителя p с применением k-й технологии возделывания (в долларах США за тонну продукции). Эти затраты включают в себя затраты на семена, удобрения, горюче-смазочные материалы, средства защиты растений, электроэнергию, оплату труда, а также фонды материального поощрения и социального страхования, накладные расходы, амортизацию, оплату за кредит, налоги. Заметим, что в основу расчета величин d_{ijpk} положены нормы a_{sijpk}, $s=1, 2, ...,l$, расхода ресурсов, ориентированные на получение прогнозируемой урожайности u_{ijpk}.

Пусть c_{ijpk} – расчетная цена единицы продукции i-й культуры, выращенной на j-м участке у производителя p с применением k-й технологии возделывания. Эта цена включает общие затраты на производство (d_{ijpk}), расходы на реализацию продукции и рентабельность. Дополнительный доход от реализации единицы продукции i-й культуры, выращенной на j-м участке у p-го производителя с применением k-й технологии возделывания, определяется формулой: $f_{ijpk} = c_i - c_{ijpk}$, где c_i – цена единицы продукции i-й культуры, установленная директивным органом (договорная цена). Ясно, что наиболее экономичными являются технологии производства, для которых $f_{ijpk} \geq 0$. Технологии возделывания культур, для которых $f_{ijpk} < 0$, используют возможности производства не наилучшим способом.

Требуется так разместить культуры по участкам и выбрать технологии их возделывания, чтобы обеспечить производство запланированных объёмов продукции (если, конечно, это возможно), а суммарный доход производителей был максимальным.

2. Математические модели задачи. Обозначим через x_{ijpk} объем продукции i-й культуры, полученной на j-м участке у производителя p с применением k-й технологии возделывания. В принятых обозначениях задача размещения культур и выбора технологий их возделывания сводится к задаче линейного программирования, в которой требуется вычислить переменные x_{ijpk}, обеспечивающие получение максимального суммарного дополнительного дохода производителей

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_p} \sum_{p=1}^{q} \sum_{k \in K_{ijp}} f_{ijpk} x_{ijpk} \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{m_p} \sum_{k \in K_{ijp}} x_{ijpk} \geq b_{ip},\ i = 1,2,\dots,n,\ p = 1,2,\dots,q, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k \in K_{ijp}} \frac{x_{ijpk}}{u_{ijpk}} \leq S_{jp},\ j = 1,2,\dots,m_p,\ p = 1,2,\dots,q, \tag{3}$$

$$x_{ijpk} \geq 0\ \forall k \in K_{ijp},\ i = 1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots,m_p,\ p = 1,2,\dots,q, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_p} \sum_{k \in K_{ijp}} a_{sijpk} x_{ijpk} \leq R_{sp},\ s = 1,2,\dots,l,\ p = 1,2,\dots,q. \tag{5}$$

Отметим, что если для некоторых i, j, p множество $K_{ijp} = \varnothing$, то полагаем $\sum_{k \in K_{ijp}} (.) = 0$.

Пусть x^*_{ijpk} – решение задачи (1) – (5). Тогда оптимальная площадь, отведенная под i-ю культуру на j-м участке у производителя p с применением k-й технологии возделывания, определяется по формуле:

$$S^*_{ijpk} = \frac{x^*_{ijpk}}{u_{ijpk}}\ \ \forall k \in K_{ijp},\ i = 1,2,\dots,n,\ j = 1,2,\dots,m_p,\ p = 1,2,\dots,q.$$

Задача (1) – (5) может решаться как в масштабе республики, области, района, так и отдельного хозяйства. Математическая модель задачи и методика ее составления с изменением размера административно-территориального подразделения существенно не меняются. Административно-территориальные различия (переход от задач республиканского масштаба к аналогичным задачам на уровне области, района и хозяйства) сказываются только на исходной информации. Предложенная модель одинаково пригодна как для колхозов и совхозов, так и для фермерских хозяйств. Конкретные особенности каждого предприятия находят свое отражение в исходной информации и некоторых дополнительно учитываемых условиях.

В многокритериальной задаче размещения культур и выбора технологий их возделывания требуется оценить качество выбираемых вариантов размещения и технологий производства по нескольким критериям (например, по общему доходу производителей, общей стоимости производства сельскохозяйственной продукции, расходу ресурсов). Многокритериальная модель этой задачи предполагает, что на множестве X всех решений системы (2) – (4) определена векторная целевая функция

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)),$$

с частными критериями

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_p}\sum_{p=1}^{q}\sum_{k\in K_{ijp}} f_{ijpk}x_{ijpk} \to \max_X, \qquad (6)$$

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_p}\sum_{p=1}^{q}\sum_{k\in K_{ijp}} d_{ijpk}x_{ijpk} \to \min_X,$$

$$f_v(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_p}\sum_{k\in K_{ijp}} a_{sijpk}x_{ijpk} \to \min_X,$$

где $v=2+s+(p-1)l$, $s=1,2,\dots,l$, $p=1,2,\dots,q$. Здесь $r=2+lq$, а показатели f_{ijpk}, d_{ijpk}, a_{sijpk}, x_{ijpk} *и множества* K_{ijp}; имеют тот же смысл, что и в задаче (1) – (5).

Заметим, что критерий (6) эквивалентен критерию

$$f_1(x) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_p}\sum_{p=1}^{q}\sum_{k\in K_{ijp}} f_{ijpk}x_{ijpk} \to \min_X.$$

Поэтому в дальнейшем критерий (6) отождествляем с последним критерием, и такую задачу будем обозначать через (X, f).

Говоря о r-критериальной задаче (X, f), будем подразумевать задачу нахождения множества Парето:

$$P(X,f) = \{x \in X \colon \bar{\exists}\, x' \in X, f(x) \geq f(x'), f(x) \neq f(x')\}.$$

В отличие от однокритериальной задачи (1) – (5) многокритериальная задача (X, f) – более гибкая и адекватная реальности, поскольку позволяет оптимизировать несколько критериев одновременно.

3. Разрешимость задачи. Набор чисел $x = (x_{ijpk})$, удовлетворяющий системе условий (2) – (5), называется планом задачи (1) – (5). Каждый план x задачи (1) – (5) связан с определенным значением $F(x)$ ее линейной функции. Чем больше это значение, тем "лучше" данный план. План $x^* = (x^*_{ijpk})$, связанный с максимально возможным значением линейной функции задачи (1) – (5), называется оптимальным планом или решением задачи. Задача (1) – (5), обладающая хотя бы одним оптимальным планом, называется разрешимой.

При анализе системы (2) – (5) могут представиться два случая:

(a) условия (2) – (5) противоречивы; другими словами, не существует набора чисел $x = (x_{ijpk})$, удовлетворяющего всем условиям задачи (1) – (5), т. е. задача не имеет ни одного плана;

(b) система условий (2) – (5) совместна и область, определяемая ею, ограничена.

Заметим, что линейная функция задачи (1) – (5) ограничена, поскольку ее переменные являются ограниченными величинами. Поэтому неразрешимость задачи может быть обусловлена лишь противоречивыми условиями задачи (случай (a)).

Утверждение 1. Решение задачи (1) – (5) сводится к решению q подзадач T_p $(p=1,2,\dots q)$:

$$F_p(x^p) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_p}\sum_{k\in K_{ijp}} f_{ijpk}x_{ijpk} \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{m_p}\sum_{k\in K_{ijp}} x_{ijpk} \geq b_{ip},\ i = 1,2,\dots,n,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\in K_{ijp}} \frac{x_{ijpk}}{u_{ijpk}} \leq S_{jp},\ j = 1,2,\dots,m_p,$$

$$x_{ijpk} \geq 0\ \forall k \in K_{ijp},\ i = 1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots,m_p,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_p}\sum_{k\in K_{ijp}} a_{sijpk}x_{ijpk} \leq R_{sp},\ s = 1,2,\dots,l.$$

Здесь $x^p = \{x_{ijpk} : k \in K_{ijp}, i = 1,2,\dots,n,\ j = 1,2,\dots,m_p\}$.

Доказательство. Пусть всякая подзадача T_p, $p=1, 2,\dots, q$, разрешима и $\bar{x}^p = \{\bar{x}_{ijpk} : k \in K_{ijp}, i=1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots,m_p\}$ – её решение. Легко видеть, что области допустимых решений любых двух подзадач T_p и T_h, $p,h \in (1, 2,\dots, q)$, $p\neq h$, не пересекаются, а целевая функция (1) представима в виде суммы q слагаемых, т. е. $F(x)=\sum_{p=1}^{q} F_p(x^p)$, каждое из которых не содержит переменных, входящих в другие слагаемые, и является целевой функцией соответствующей подзадачи. Поэтому набор $\bar{x} = \{\bar{x}_{ijpk} : k \in K_{ijp}\, i=1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots,m_p, p=1,2\dots,q\}$ является решением задачи (1) – (5). Утверждение 1 доказано.

Таким образом, утверждение 1 позволяет свести решение задачи (1) – (5) к решению q подзадач T_p, $p=1, 2,\dots, q$ и тем самым существенно понизить размерность исходной задачи. Поскольку всякая такая подзадача с математической точки зрения имеет один и тот же вид, то в дальнейшем для простоты записи индекс p будем опускать, т. е. будем изучать свойства для задачи с одним производителем:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k\in K_{ij}} f_{ijk}x_{ijk} \to \max, \qquad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k\in K_{ij}} x_{ijk} \geq b_i,\ i = 1,2,\dots,n, \qquad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\in K_{ij}} \frac{x_{ijk}}{u_{ijk}} \leq S_j,\ j = 1,2,\dots,m, \qquad (9)$$

$$x_{ijk} \geq 0\ \forall k \in K_{ij},\ i = 1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots,m, \qquad (10)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k\in K_{ij}} a_{sijk}x_{ijk} \leq R_s,\ s = 1,2,\dots,l. \qquad (11)$$

Здесь показатели b_i, S_j, u_{ijk}, f_{ijk}, a_{sijk}, x_{ijk} и множество K_{ij} имеют тот же смысл, что и в задаче (1) – (5).

Заметим, что утверждение, аналогичное утверждению 1, можно доказать и для многокритериальной задачи (X, f).

Докажем справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. Для разрешимости задачи (7) – (11) необходимо выполнение неравенств

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \le \sum_{j=1}^{m} S_j u_j^*, \qquad (12)$$

$$a_s^* \sum_{i=1}^{n} b_i \le R_s, \quad s = 1,2,\dots,l, \qquad (13)$$

где

$$u_j^* = \max\{u_{ijk}:\ k \in K_{ij},\ i = 1,2,\dots,n\}, \qquad (14)$$

$$a_s^* = \min\{a_{sijk}:\ k \in K_{ij},\ i = 1,2,\dots,n,\ j = 1,2,\dots,m\}. \ (15)$$

Доказательство. Пусть система (8) – (11) совместна и $x^* = (x_{ijk}^*)$ – её некоторое решение. Тогда в силу (9) и (14) имеем

$$S_j \ge \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \in K_{ij}} \frac{x_{ijk}^*}{u_{ijk}} \ge \frac{1}{u_j^*} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \in K_{ij}} x_{ijk}^*,\ j = 1,2,\dots,m,$$

т.е

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k \in K_{ij}} x_{ijk}^* \le S_j u_j^*,\ \ j = 1,2,\dots,m. \qquad (16)$$

Просуммировав неравенство (8) по $i=1, 2, \dots, n$, а неравенство (16) по $j=1, 2, \dots, m$, получаем неравенства

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in K_{ij}} x_{ijk}^* \ge \sum_{i=1}^{n} b_i, \quad \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \sum_{k \in K_{ij}} x_{ijk}^* \le \sum_{j=1}^{m} S_j u_j^*,$$

из которых вытекает неравенство (12).

Далее, из (8) и (13) вытекают неравенства

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in K_{ij}} a_{sijk} x_{ijk}^* \ge a_s^* \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in K_{ij}} x_{ijk}^* \ge a_s^* \sum_{i=1}^{n} b_i,\ s = 1,2,\dots,l.$$

Отсюда, принимая во внимание условие (11), получаем неравенство (13). Утверждение 2 доказано.

Один из эффективных методов решения задачи (7) – (11) – это симплекс-метод (см., например, [4,5]). Количество итераций, необходимое для решения задачи симплекс-методом, зависит от конкретных особенностей задачи и от начального опорного плана. Приемлемых теоретических оценок числа итераций для общей задачи линейного программирования пока не получено. В [6] дано теоретическое обоснование вероятностной оценки числа итераций симплекс-метода. А именно, было доказано, что среднее число итераций симплекс-метода линейно от размерности задачи. Это согласуется с почти линейным ростом числа итераций симплекс-метода на практике.

4. **Алгоритм решения задачи размещения культур на одном земельном участке.** В случаях, когда $m=1$ и $|K_{i1}| = 1$, $i=1, 2, \dots, n$, задача (7) – (11) превращается в задачу: найти переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$, обеспечивающие

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i \to \max \qquad (17)$$

при условиях

$$x_i \ge b_i,\ \ i = 1,2,\dots,n \qquad (18)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{u_i} \le S, \qquad (19)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} x_i \le R_s,\ \ s = 1,2,\dots,l. \qquad (20)$$

Здесь x_i – объём производства продукции i-й культуры; S - площадь, имеющаяся у производителя; u_i – урожайность i-й культуры; f_i – дополнительный доход от реализации единицы продукции i-й культуры; a_{si} – норма расхода s-го вида ресурса на производство единицы продукции i-й культуры; b_i и R_s, имеют тот же смысл, что и в задаче (7) – (11).

Утверждение 3. Задача (17) – (20) разрешима тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{u_i} \le S, \qquad (21)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si} b_i \le R_s,\ \ s = 1,2,\dots,l. \qquad (22)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть система (18) – (20) совместна и $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ – её некоторое решение. Тогда в силу (18) – (20) справедливы неравенства (21) и (22).

Достаточность. Пусть выполняются неравенства (21) и (22). Тогда план x^*, компоненты которого определяются по формуле $x_i^* = b_i$, $i=1, 2, \dots, n$, удовлетворяет условиям (18) – (20).

Утверждение 3 доказано.

Используя утверждение 3, опишем эффективный и практически легко реализуемый алгоритм решения задачи (17) – (19).

Алгоритм состоит из трех этапов.

Этап 1. Проверяем выполнение неравенства (21). Если оно справедливо, то переходим к этапу 2. Иначе, алгоритм свою работу заканчивает, поскольку задача (17) – (19) неразрешима.

Этап 2. Определяем величину f_{i_0} по формуле $f_{i_0} = \max\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ и переходим к этапу 3.

Этап 3. Строим вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, компоненты которого определяются по формулам: $x_i^* = b_i$, $i = 1,2,\dots,i_0 - 1, i_0 + 1, \dots, n$, $x_{i_0}^* = b_{i_0} + (S - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{u_i}) u_{i_0}$.

Очевидно, что вектор x^*, построенный по описанному выше алгоритму, удовлетворяет условиям (18) – (19) и максимизирует функцию (17). Оптимальная площадь, отведенная под i-ю культуру, определится по формуле:

$$S_i^* = \frac{x_i^*}{u_i},\ \ i = 1,2,\dots,n.$$

Легко видеть, что предложенный алгоритм имеет сложность (трудоемкость) $0(n)$ операций.

5. Методы коррекции неразрешимых математических моделей. Практика моделирования и численного анализа задач оптимального планирования показала, что возникновение математических моделей, не имеющих решений (неразрешимых), – явление обычное, связанное, в частности, с ресурсно-дефицитной природой экономики [7]. В связи с этим возникла необходимость развития теории таких моделей и методов их коррекции.

Для модели (7) – (11), не имеющей решения, предложены следующие методы ее корректировки, позволяющие ослабить ограничения вида (8) и (11) за счет незначительного уменьшения величин $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и увеличения величин $R_1, R_2, \ldots, R_l$.

5.1. Метод линейной аппроксимации. Решаем вспомогательную задачу: определить переменные x_{ijk}, $k \in K_{ij}$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,m$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и $z_1, z_2, \ldots, z_l$, которые обращают в минимум функцию

$$\sum_{i=1}^{n} q_i y_i + \sum_{s=1}^{l} g_s z_s \tag{23}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in K_{ij}} x_{ijk} \geq b_i - y_i, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k \in K_{ij}} \frac{x_{ijk}}{u_{ijk}} \leq S_j, \quad j = 1,2,\ldots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in K_{ij}} a_{sijk} x_{ijk} \leq R_s + z_s, \quad s = 1,2,\ldots,l.$$

$$x_{ijk} \geq 0 \ \forall k \in K_{ij}, \ i = 1,2,\ldots,n, \ j=1,2,\ldots,m,$$

$$0 \leq y_i \leq b_i, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

$$z_s \geq 0, \quad s = 1,2,\ldots,l,$$

где $q_i \geq 0$, $i=1,2,\ldots,n$ и $g_s \geq 0$, $s=1,2,\ldots,l$ – заданные весовые коэффициенты.

Затем решаем задачу (7) – (11), в которой величины b_i, $i=1,2,\ldots,n$, заменены на $b_i - y_i^*$, а величины R_s, $s=1, 2,\ldots,l$ на $R_s + z_s^*$, где $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*$ и $z_1^*, z_2^*, \ldots, z_l^*$ – числа, полученные в результате решения вспомогательной задачи.

5.2. Метод аппроксимации по критерию "узкого места". Этот метод отличается от метода линейной аппроксимации лишь тем, что вместо линейного критерия (23) рассматривается критерий "узкого места": $\max\{y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_l\} \to \min$.

5.3. Метод параметризации. Предположим, что из некоторых соображений, например, учитывая важность тех или иных культур, а также наличие ресурсов, имеющихся у производителя, нам удалось определить соотношение корректирующих параметров. В данном случае вспомогательная задача формулируется следующим образом: при заданных величинах $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*$ и $z_1^*, z_2^*, \ldots, z_l^*$ требуется найти переменные $x_{ijk}, k \in K_{ij}$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,m$, а также значение параметра t, обеспечивающие

$$\min t$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in K_{ij}} x_{ijk} \geq b_i - t y_i^*, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k \in K_{ij}} \frac{x_{ijk}}{u_{ijk}} \leq S_j, \quad j = 1,2,\ldots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in K_{ij}} a_{sijk} x_{ijk} \leq R_s + t z_s^*, \quad s = 1,2,\ldots,l.$$

$$x_{ijk} \geq 0 \ \forall k \in K_{ij}, \ i = 1,2,\ldots,n, \ j=1,2,\ldots,m.$$

После этого решаем задачу (7) – (11), в которой величины b_i, $i=1, 2,\ldots, n$, заменены на $b_i - t^* y_i^*$, а величины R_s, $s=1, 2,\ldots,n$ на $R_s + t^* z_s^*$, где t^* – значение параметра, определенное в результате решения вспомогательной задачи.

5.4. Метод коррекции по Парето. Он основан на решении многокритериальной задачи линейного программирования. Пусть в системе ограничений (8) – (11) выделена совместная подсистема, т.е. множество ограничений, которые обязательно должны выполняться, например,

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in K_{ij}} x_{ijk} \geq b_i, \quad i \in I, \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \in K_{ij}} \frac{x_{ijk}}{u_{ijk}} \leq S_j, \quad j = 1,2,\ldots,m,$$

$$x_{ijk} \geq 0 \ \forall k \in K_{ij}, \ i = 1,2,\ldots,n, \ j=1,2,\ldots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in K_{ij}} a_{sijk} x_{ijk} \leq R_s, \quad s \in L,$$

где I, L – некоторые подмножества индексов соответственно из множеств $\{1, 2, \ldots, n\}$ и $\{1, 2, \ldots, l\}$.

Множество всех решений выделенной подсистемы обозначим через $\overline{X}$. Будем предполагать, что хотя бы одно из множеств $\overline{I} = \{1,2,\ldots,n\} \setminus I$, и $\overline{L} = \{1,2,\ldots,l\} \setminus L$ не пусто, так как в случае, когда $\overline{I} = \varnothing$ и $\overline{L} = \varnothing$, задача (7) – (11) является разрешимой и в проведении ее коррекции нет необходимости. Сначала находим некоторый элемент $x^* = \{x_{ijk}^*, k \in K_{ij}, i=1, 2,\ldots, n, j=1, 2,\ldots, m\}$ множества Парето многокритериальной задачи:

$$-\sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in K_{ij}} x_{ijk} \to \min_{\overline{X}}, \quad i \in \overline{I},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in K_{ij}} a_{sijk} x_{ijk} \to \min_{\overline{X}}, \quad s \in \overline{L}.$$

Затем решаем задачу (7) – (11), в которой величины b_i, $i \in \overline{I}$ и R_s, $s \in \overline{L}$ заменены соответственно на $\sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in K_{ij}} x_{ijk}^*$ и $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in K_{ij}} a_{sijk} x_{ijk}^*$.

Указанные выше четыре метода коррекции задачи (7) – (11) можно распространить и на случай многокритериальной задачи (X, f), когда множество допустимых решений $X = \varnothing$.

6. Об информационном обеспечении. Ядро информационного обеспечения задачи (7) – (11) составляют вектора $(a'_{1ijpk}, a'_{2ijpk}, \ldots, a'_{lijpk})$ норм расхода ресурсов (семян, удобрений, горюче-смазочных материалов, средств защиты растений, электроэнергии, затрат труда) на единицу площади для каждой культуры, каждого участка и каждой технологии возделывания, ориентированные на получение прогнозируемых урожайностей u_{ijpk}. Поэтому первоочередным и важным вопросом при решении задачи (7) – (11) является разработка норм a'_{sijpk}, $s=1,2,...,l$, $k \in K_{ijp}$, $i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,m_p$, $p=1,2,...,q$, на основе которых должна быть создана информационная база.

Остальные исходные данные (площади земельных участков, запланированные объёмы производства сельхозпродукции и объёмы имеющихся ресурсов) задачи (7) – (11) являются оперативными, вводятся в компьютер при решении конкретной задачи и их определение не составляет большого труда.

7. О программном обеспечении. Разработана программа, реализующая симплекс-метод решения общей задачи линейного программирования, которая ориентирована на совместную работу по проведению анализа, корректировки и решения задачи. Созданы программные средства обоснования цен на продукцию растениеводства, позволяющие рассчитать цены под различные технологии возделывания культур.

Разработанные модели, методы, алгоритмы и программные средства апробированы на реальной информации колхоза им. Гастелло. Проведенные расчеты показали их работоспособность и позволили определить резервы достижения потенциально возможного повышения эффективности сельскохозяйственного производства за счёт улучшения использования производственно-технического потенциала.

Литература

1. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. – М.: Наука, 1969.

2. Кофман А., Лари – Лабордер А. Методы и модели исследования операций. – М. Мир, 1977.

3. Кравченко Р.Г., Попов И.Г., Толпекин С.З. Экономико-математические методы в организации и планировании сельскохозяйственного производства. – М.. Колос, 1973.

4. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения. – М.: Прогресс, 1966.

5. Канторович Л.В. Математические методы организации и планирования производства. – Л. ЛГУ, 1939.

6. Smale S. On the everage number of steps in the simplex method of linear programming // Math. Programming. 1983. V 27. № 1. – p. 241-262.

7. Еремин И.И. Противоречивые модели оптимального планирования. – М.. Наука, 1988.