

## ЗЕМЛЯРОБСТВА І РАСЛІНОВОДСТВА

УДК 631.175:631.8

А. П. ЛИХАЦЕВИЧ

### МОДЕЛЬ УРОЖАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ КУЛЬТУР

*Институт мелиорации и луговодства НАН Беларуси*

*(Поступила в редакцию 12.10.2004)*

Актуальность планирования урожайности сельскохозяйственных культур и в конечном итоге необходимость заблаговременного определения валовых сборов растениеводческой продукции обусловили появление целого научного направления — так называемого «программирования урожая». Обобщенный учет достижений данного научного направления к настоящему времени позволил выработать нормативные показатели трудовых и материальных затрат для ведения сельскохозяйственного производства [3].

Данные нормативы базируются на установленных опытным путем закономерностях, отражающих зависимость прогнозируемого урожая от вложенных ресурсов. Вместе с тем проблеме никак нельзя считать исчерпанной, многие исследователи продолжают совершенствовать методику заблаговременного определения конечного урожая, привлекая для этого доступный им математический аппарат [2, 4]. Данная работа также направлена на развитие формальных представлений о взаимосвязях в системе растение — окружающая среда и построение достаточно общей модели влияния факторов внешней среды на величину урожая сельскохозяйственной культуры.

Регулированию в условиях сельскохозяйственного производства поддаются такие урожаеобразующие факторы, как пища, вода, частично тепло. Не поддаются регулированию (кроме условий защищенного грунта) освещенность, газовый режим. Вместе с тем любая сельскохозяйственная культура в процессе естественного или искусственного отбора выработала некие соответствующие именно ей требования, в рамках которых действие каждого фактора внешней среды будет либо благоприятным, либо нейтральным, либо неблагоприятным. Причем степень благоприятности внешних условий, очевидно, связана с амплитудой отклонения любого из факторов среды от некоего своего оптимального (эталонного) значения. Но потенциальные возможности растительного организма, в свою очередь, заложены в его «идеальном начале» — семени. Именно качество семенного материала определяет потенциал продуктивности сельскохозяйственной культуры.

Базируясь на изложенных исходных принципах, сформулируем математическое описание взаимодействий в системе растение — окружающая среда. При этом представим формирование потенциального конечного урожая в виде пространства (динамичной сферы факторов окружающей среды), в центре которого находится «идеальное начало» — семенной материал с генетически обусловленным ходом развития. Причем соответствие условий формирования конечного урожая требованиям растительного организма выразим, используя дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial^n Y}{\partial \bar{r}_1 \partial \bar{r}_2 \dots \partial \bar{r}_i \dots \partial \bar{r}_n} = Y_{pp} f(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_i, \dots, \bar{r}_n), \quad (1)$$

где  $n$  — количество факторов, влияющих на урожай сельскохозяйственной культуры;  $Y$  — урожай сельскохозяйственной культуры;  $\bar{r}_i$  — итоговый показатель  $i$ -го фактора окружающей среды;  $Y_{pp}$  — потенциально возможный урожай данной культуры, определяемый только внут-

ренными свойствами «идеального начала» — качеством семенного материала;  $f(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_i, \dots, \bar{r}_n)$  — функция от итоговых показателей учитываемых факторов, повлиявших на развитие растений (степень воздействия окружающей среды на реализацию генетически заложенной в семенном материале программы развития).

В соответствии со сделанным ранее допущением о наличии некоего оптимума для каждого фактора жизни растений обобщенную функцию влияния регулируемых факторов окружающей среды на растение представим в виде отношения, характеризующего отклонение фактического значения обобщенного показателя ресурсов от эталонного (оптимального). Учитывая условие равенства размерностей, предложим наиболее вероятный вариант данной функции:

$$f(\bar{R}) = f(\text{grad } \bar{R}) = \int_{\bar{R}}^{\bar{R}_m} d\bar{R} \left( \int_0^{\bar{R}_m} \bar{R} d\bar{R} \right)^{-1}, \quad (2)$$

где  $\bar{R}$  — обобщенный показатель (ресурс) регулируемого фактора окружающей среды;  $\bar{R}_m$  — эталонные значения обобщенного показателя ресурсов, при которых создаются условия для получения потенциального урожая.

Из соотношения (2) следует:

$$f(\text{grad } \bar{R}) = 2\bar{R}_m^{-2} (\bar{R}_m - \bar{R}). \quad (3)$$

Рассмотрим такой вариант агротехники, когда величину урожая определяет только уровень питания растений. Поэтому, в первом приближении, ограничим число рассматриваемых аргументов четырьмя главными факторами (основными факторами жизни растений), включая свет, тепло, влагу, пищу, считая, что газовый режим и другие неучитываемые параметры естественной среды обитания находятся, как правило, в оптимуме. Причем при рассмотрении функции (1) предположим, что она представлена разделяющимися переменными. В этом случае:

$$\frac{\partial Y}{\partial \bar{F}} = 2Y_{PP} f_L(\bar{L}) f_T(\bar{T}) f_E(\bar{E}) \bar{F}_m^{-2} (\bar{F}_m - \bar{F}), \quad (4)$$

где  $\bar{L}, \bar{T}, \bar{E}, \bar{F}$  — фактические итоговые значения показателей света, тепла, влаги, пищи соответственно;  $\bar{F}_m$  — эталонное итоговое значение фактора питания растений, при котором формируется потенциально возможный урожай.

Уравнение (4) является дифференциальным представлением зависимости конечного урожая от обеспеченности растений в течение вегетации пищей. Из (4) не сложно получить решение в явном виде:

$$Y = Y_{PP} [f_L(\bar{L}) f_T(\bar{T}) f_E(\bar{E})] \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\bar{F}}{\bar{F}_m} \right)^2 \right], \quad (5)$$

где  $Y$  — реально достижимый урожай сельскохозяйственной культуры, определяемый качеством семенного материала (потенциально возможным урожаем), влиянием света, тепла, влаги на формирование урожая и соответствием фактора питания растений своему оптимальному значению.

Представим (5) в свернутой форме, соответствующей конкретным условиям возделывания сельскохозяйственной культуры с учетом только уровня питания:

$$Y = Y_{RP} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\bar{F}}{\bar{F}_m} \right)^2 \right], \quad (6)$$

где  $Y_{RP}$  — реально возможный урожай при естественных освещенности, тепло- и влагообеспеченности, т. е.

$$Y_{RP} = Y_{PP} f_L(\bar{L}) f_T(\bar{T}) f_E(\bar{E}). \quad (7)$$

Формальное представление модели урожая, предложенное выше, позволяет дистанцировать формулы (6), (7) от класса эмпирических моделей программирования урожая. Поэтому назовем предложенную модель *градиентной моделью урожая*, указывая на присутствие в ней эталонных (опорных) значений показателей окружающей среды, с которыми количественно сравниваются фактические значения показателей. Результаты этого сравнения и определяют конечный урожай сельскохозяйственной культуры.

Заметим, что модель урожая, представленная в виде уравнений (6), (7), может иметь несколько другой вид, совершенно идентичный указанному.

Например:

$$Y = Y_{RP} \frac{F}{F_m} \left( 2 - \frac{F}{F_m} \right). \quad (8)$$

Причем пользоваться в расчетах можно любой формой модели, как (6), так и (8).

Проверим соответствие предложенной модели имеющимся результатам полевого опыта. К настоящему времени в Беларуси получено достаточно много опытных данных, характеризующих связь величины конечного урожая сельскохозяйственной культуры с дозой вносимых удобрений. Формулы (6), (8) позволяют определить ожидаемый (планируемый) урожай в зависимости от уровня питания растений в условиях реальной (не идеальной) агротехники через использование функции (7).

Вместе с тем в научной литературе встречается несколько иная аппроксимация зависимости урожая от уровня минерального питания. Достаточно высокие корреляционные характеристики имеет полином второй степени (парабола) [2, 4]:

$$Y(F_\beta) = a_0 + a_1 F_\beta - a_2 F_\beta^2, \quad (9)$$

где  $Y(F_\beta)$  — фактически полученный урожай, как функция внесенной дозы удобрений, ц/га;  $F_\beta$  — суммарная доза вносимых удобрений (NPK), кг д.в./га;  $a_0, a_1, a_2$  — коэффициенты уравнения регрессии, определяемые эмпирическим (опытным) путем.

Сравним эмпирическую зависимость (9) с градиентной моделью урожая (6). Их объединяет то, что эти уравнения являются кривыми второго порядка. Не сложно доказать, что эти кривые идентичны.

В качестве аргумента в функции (6) фигурирует уровень питания растений ( $F$ ). Он складывается из двух составных частей: исходного почвенного плодородия ( $F_o$ ) и дозы NPK ( $F_B$ ). Эту особенность можно учесть через соответствующее суммирование:

$$F = F_o + F_B, \quad (10)$$

где  $F_o$  — уровень почвенного плодородия, выраженный через исходное содержание в почве (до внесения удобрений) усвояемых форм элементов питания растений, кг д.в./га.

Сравнивая (6), (10) с эмпирической зависимостью (9), можно записать:

$$a_0 = Y_{RP} \frac{F_o}{F_m} \left( 2 - \frac{F_o}{F_m} \right), \quad (11)$$

$$a_1 = Y_{RP} \frac{2}{F_m} \left( 1 - \frac{F_o}{F_m} \right), \quad (12)$$

$$a_2 = Y_{RP} F_m^{-2}. \quad (13)$$

Выразим параметры градиентной модели через эмпирические коэффициенты зависимости (9):

$$F_o = \frac{1}{2a_2} \left( \sqrt{4a_0 a_2 + a_1^2} - a_1 \right), \quad (14)$$

$$F_m = \frac{1}{2a_2} \left( \sqrt{4a_0 a_2 + a_1^2} \right), \quad (15)$$

$$Y_{RP} = \frac{1}{4a_2} \left( 4a_0 a_2 + a_1^2 \right). \quad (16)$$

Формулы (14)—(16) позволяют по известным эмпирическим коэффициентам в (9) —  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  определить параметры градиентной модели урожая  $Y_m$ ,  $F_m$ ,  $F_o$ .

Разброс экспериментальных точек в эмпирической модели (9) объясняется тем, что анализируемые годы различаются по тепло- и влагообеспеченности. При обосновании эмпирической зависимости (9) поле экспериментальных точек было осреднено, т. е. в (7) заведомо было принято:

$$Y_{RP} \approx \text{const.} \quad (17)$$

Однако следует заметить, что без упрощения (17) получить эмпирическую связь (9) было бы просто невозможно.

Используя полученные конверторы (14)—(16), вычислим, для примера, опорные показатели градиентной модели урожая для сельскохозяйственных культур, по которым получены эмпирические коэффициенты в формуле (9) [4]. Результаты расчета представлены в табл. 1. При этом примем:

$$F_{\beta m} = F_m + F_o, \quad (18)$$

$$\Delta Y_m = Y_{RP} - Y_o, \quad (19)$$

$$\Delta Y_{fm} = \frac{\Delta Y_m}{F_{\beta m}} = \frac{Y_{RA} - Y_o}{F_{\beta m}}, \quad (20)$$

где  $F_{\beta m}$  — максимально приемлемая доза внесения NPK, при которой можно получить максимальный урожай, кг д.в./га;  $\Delta Y_m$  — максимально возможная прибавка урожая от вносимых удобрений, ц/га;  $\Delta Y_{fm}$  — окупаемость максимально приемлемой дозы удобрений прибавкой урожая, ц/га.кг д.в.

**Расчет опорных показателей градиентной модели урожая для различных сельскохозяйственных культур по данным [4]**

Сельскохозяйственная культура	Эмпирические коэффициенты			Опорные показатели градиентной модели					Прибавка урожая	
	$a_0$ , ц/га	$a_1$ , ц/кг д.в.	$a_2$ , ц.га/(кг д.в.) <sup>2</sup>	$F_o$ , кг д.в./га	$Y_o$ , ц/га	$F_m$ , кг д.в./га	$Y_{RA}$ , ц/га	$F_{\beta m}$ , кг д.в./га	$\Delta Y_m$ , ц/га	$\Delta Y_{fm}$ , ц/га кг д.в.
Картофель	202,3	0,397	0,00039	373	202	882	303	509	101	0,200
Морковь	383,6	0,469	0,00120	403	383	598	429	195	46,0	0,231
Сахарная свекла	356,0	0,454	0,00030	569	356	1326	528	757	172	0,227
Озимая рожь	21,3	0,115	0,00012	158	21,3	637	48,8	479	27,5	0,057
Пшеница	21,4	0,081	0,00020	182	21,4	385	29,6	203	8,2	0,040
Тритикале	34,4	0,120	0,00020	212	34,4	512	52,4	300	18,0	0,060
Ячмень	19,9	0,124	0,00010	145	19,9	765	58,4	620	38,4	0,062
Овес	26,2	0,068	0,00010	274	26,2	614	37,8	340	11,6	0,034

Выполненный анализ полностью подтвердил обоснованность частной формы градиентной модели урожая (6). Вместе с тем расчеты (табл.) показали слабые стороны представленной в [4] эмпирической формулы (9). Прежде всего это касается значений коэффициента  $a_2$ . Их необходимо определять с точностью до трех значащих цифр. С аналогичной точностью следует определять все коэффициенты в (9). Поскольку от величины  $a_2$  существенно зависят значения всех опорных показателей градиентной модели (6), будем считать представленные в [4] значения эмпирических коэффициентов весьма приближенными, требующими уточнения.

Кроме удобрений на урожай сельскохозяйственной культуры влияют и другие факторы. Можно ли все это влияние сводить к градиентной форме, подобной (6)? Для ответа на поставленный вопрос обратимся к литературе.

Достаточно скрупулезный количественный анализ влияния факторов внешней среды на урожай сельскохозяйственных культур выполнил Э. Н. Шкутов [4]. В указанной работе доказана квадратичная форма влияния на урожай не только удобрений, но и средств защиты растений. Кроме того там же показано наличие точно такой же связи урожая с наличием техники для посева, обработки почвы и растений, уборки урожая [4].

Помимо указанных факторов, в литературе достаточно часто встречается анализ влияния орошения на урожай сельхозкультур. Некоторое обобщение опытных данных по искусственному поливу выполнено в работе [1]. Там же приведена формула А. Н. Костякова:

$$E = K_E Y, \quad (21)$$

где  $E$  — водопотребление (эвапотранспирация) сельскохозяйственного поля;  $K_E$  — коэффициент водопотребления;  $Y$  — урожай сельскохозяйственной культуры.

В соответствии с (21):

$$K_{Em} = \frac{E_m}{Y_{MP}}, \quad (22)$$

где  $K_{Em}$  — коэффициент водопотребления при получении максимального возможного урожая.

Можно показать, что в условиях орошения (при оптимальной влагообеспеченности):

$$\frac{K_{Em}}{K_E} = \frac{F}{F_m} \left( 2 - \frac{F}{F_m} \right). \quad (23)$$

Форма связи (23) также сведена к квадратичному уравнению, что, собственно, и вытекает из опытных данных, представленных в [1].

Таким образом, помимо фактора питания растений (удобрений), квадратичная форма влияния на урожай подтверждается еще для такого урожаеобразующего фактора, как влага, а в работе [4] еще и для нескольких урожаесохраняющих факторов (средства защиты растений и работа сельскохозяйственной техники). Подобные совпадения вряд ли можно назвать случайными, что позволяет с достаточно высокой долей уверенности рекомендовать предложенную градиентную модель урожая сельскохозяйственной культуры для дальнейшей апробации по опытным данным и для прямого применения при анализе результатов полевых исследований, а также при их планировании.

### Литература

1. Лихачевич А. П., Стельмах Е. А. Оценка факторов, формирующих неустойчивую влагообеспеченность сельскохозяйственных культур в гумидной зоне (на примере Беларуси, Центрального и Волго-Вятского регионов Российской Федерации). Мн., 2002.
2. Семеновко Н. Н. Прогрессивные системы применения азотных удобрений. Мн., 2003.
3. Справочник нормативов трудовых и материальных затрат для ведения сельскохозяйственного производства: 2-е изд., перераб. и доп. / Под ред. В. Г. Гусакова. Сост. Я. Н. Бречко, М. Е. Сумонов. Мн., 2002.
4. Шкутов Э. Н. Определение расчетного уровня урожайности сельскохозяйственных культур на мелиоративных системах // Мелиорация переувлажненных земель: Сб. науч. работ. Том 50. Мн., 2003. С. 48—63.

*LIKHA TSEVICH A. P.*

### MODEL OF HARVEST OF AGRARIAN CULTURES

### Summary

Interdependences in a system «plant — environment» are analyzed. Standard means of environmental indexes are marked out. Gradient model of harvest is created on their base. Model identification has been done on results of field investigations of influence of the fertilizers onto harvest. Its correlation to tests data on connection of harvest to levels of water consumption of agrarian cultures, plant protection and technical equipment of agricultural production have been shown.