## *МЕХАНІЗАЦЫЯ І ЭНЕРГЕТЫКА*

*УДК 534.113:621.8.034.4*

*В. М. БУЛГАКОВ, И. В. ГОЛОВАЧ*

# ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯХ СПЛОШНОГО УПРУГОГО ТЕЛА С ЗАКРЕПЛЕННЫМ КОНЦОМ

*Национальный аграрный университет, Киев, Украина*

*(Поступила в редакцию 11.10.2005)*

**Введение.** В данной работе на базе общей теории колебаний прямых стержней переменного поперечного сечения [1] рассматриваются колебания сплошного упругого тела с одним закрепленным концом. Примером такого тела может быть расположенный в почве корнеплод сахарной свеклы, причем окружающая корнеплод почва также является упругой средой.

Рассмотрим случай, когда колебательные движения к указанному телу будут прикладываться в продольно-вертикальной плоскости (этому положению будет отвечать пример, когда к корнеплоду, который находится в неразрушенной почве, будут прикладываться усилия с двух сторон от вибрационного выкапывающего рабочего органа при его извлечении из почвы).

Для исследования колебаний голономных систем с бесконечным числом степеней свободы применяют принцип стационарного действия Остроградского–Гамильтона [1]. В теории продольных, крутильных и поперечных колебаний прямых стержней применяются функционалы Остроградского–Гамильтона, которые в наиболее общей форме имеют такой вид [1]:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{l} L\left(t,x,y,\frac{\partial y}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial x},\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},\frac{\partial^2 y}{\partial t\,\partial x},\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)dx\,dt, \quad (1)$$

где $L = T - \Pi$ – функция Лагранжа; $T$ – кинетическая энергия системы; $\Pi$ – потенциальная энергия системы.

**Постановка задачи.** Используя принцип Остроградского–Гамильтона, исследовать продольные колебания сплошного упругого тела, происходящие под действием вертикальной возмущающей силы, которая изменяется по гармоническому закону следующего вида:

$$Q_{\text{зб.}}(t) = H\sin\omega t\,, \quad (2)$$

где $H$ – амплитуда возмущающей силы; $\omega$ – частота возмущающей силы.

Как видим из составленной схемы (рис. 1), сплошное упругое тело – корнеплод, имеющий конусообразную форму (угол при вершине которого равен $2\gamma$, а верхняя часть находится несколько выше уровня поверхности почвы), моделируется как стержень переменного поперечного сечения с закрепленным нижним концом (точка $O$). В центре тяжести, который обозначен точкой $C$, приложена сила $G$ – вес тела. Общая его длина $h$. Связь тела (корнеплода) с почвой определяется общей реакцией почвы $R_x$, которая расположена вдоль оси $x$.

Указанная выше возмущающая сила $Q_{\text{зб.}}$ прикладывается к телу сразу с двух его сторон, поэтому на схеме она представлена двумя составляющими $Q_{\text{зб.1}}$ и $Q_{\text{зб.2}}$. Эти силы приложены на расстоянии $x_1$ от начала координат (точки $O$) и вызывают колебания тела (корнеплода) в продольно-вертикальной плоскости, которые разрушают его связи с почвой и создают для последнего условия извлечения.

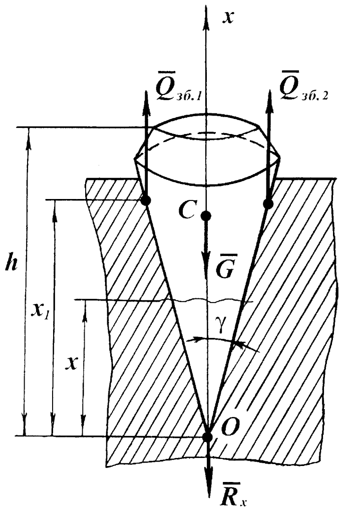

Рис. 1. Расчетная схема упругого тела с закрепленным концом

**Решение задачи.** Составим функционал $S$ Остроградского–Гамильтона для вибрационного процесса. С этой целью введем необходимые обозначения: $F(x)$ – площадь поперечного сечения тела в любой точке, которая находится на расстоянии $x$ от нижнего конца, м$^2$; $E$ – модуль Юнга для материала тела, Н/м$^2$; $y(x, t)$ – продольное смещение любого поперечного сечения тела в момент времени $t$, м; $Q(x, t)$ – интенсивность продольной внешней нагрузки, направленной вдоль оси тела, Н/м; $\mu(x)$ – погонная масса тела, кг/м.

Согласно [1], функционал Остроградского–Гамильтона для продольных колебаний прямых стержней имеет вид

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{h}\left[\mu(x)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - EF(x)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + Q(x,t)y\right]dx\,dt. \quad (3)$$

Найдем выражения всех величин, входящих в функционал (3). Учитывая, что тело имеет форму конуса, находим, что площадь его поперечного сечения $F(x)$ в точке, находящейся на произвольном расстоянии $x$ от точки $O$, будет равна

$$F(x) = \pi x^2\,\mathrm{tg}^2\gamma. \quad (4)$$

Очевидно, что погонную массу тела можно определить с помощью уравнения

$$\mu(x) = \rho\pi x^2\,\mathrm{tg}^2\gamma, \quad (5)$$

где $\rho$ – плотность тела, кг/м$^3$.

Поскольку величина $Q(x, t)$, входящая в функционал (3), является интенсивностью распределенной нагрузки, которая измеряется в ньютонах на метр, то возмущающее усилие должно иметь размерность интенсивности нагрузки. С помощью импульсивной функции первого порядка $\sigma_1(x)$ [1] можно определять интенсивность сосредоточенной нагрузки и таким образом включать в состав распределенной по длине нагрузки сосредоточенные силы.

Если $Q_{зб.}(t)$ – сосредоточенная возмущающая сила, которая приложена в точке $x_1$ и измеряется в ньютонах, то функция

$$Q_{зб.}(x,t) = Q_{зб.}(t)\sigma_1(x - x_1) \quad (6)$$

имеет размерность Н/м и выражает интенсивность сосредоточенной нагрузки в точке $x_1$.

Функция $\sigma_1(x - x_1)$ будет равна нулю для всех $x$, кроме $x = x_1$, где она обращается в бесконечность.

Пусть возмущающая сила, действующая по закону (2), приложена к телу на расстоянии $x_1$ от начала отсчета (точка $O$ на рис. 1). Тогда, согласно (6), можно написать

$$Q_{зб.}(x,t) = H\sin\omega t\,\sigma_1(x - x_1). \quad (7)$$

Поскольку сплошное упругое тело связано с почвой, которая также является упругой средой, то при действии на нее возмущающей силы (2) возникает сила сопротивления почвы перемещению тела при его колебаниях. Эта сила также влияет на процесс собственных колебаний тела в почве, особенно в начале колебательного процесса, пока его связи с почвой еще не нарушены.

Очевидно, что сила сопротивления почвы (для всего тела) является распределенной нагрузкой по площади контакта тела с почвой, поэтому определим ее интенсивность как силу сопротивления почвы перемещению единицы длины тела.

Пусть $c$ – коэффициент упругой деформации почвы, отнесенный к площади контакта, Н/м$^2$. Будем считать, что окружающая тело почва под действием возмущающей силы $H\sin\omega t$ осуществляет вынужденные колебания по тому же самому гармоническому закону с амплитудой, которая определяется упругими свойствами почвы. Тогда интенсивность $P(x, t)$ (Н/м) сопротивления почвы перемещению тела в точке $x$ будет равна

$$P(x,t) = 2\pi c x \operatorname{tg}\gamma \sin\omega t. \tag{8}$$

Таким образом, будем иметь такое соотношение для продольной внешней нагрузки:

$$Q(x,t) = Q_{\text{зб.}}(x,t) - P(x,t).$$

При учете выражений (4), (5), (7) и (8) функционал Остроградского–Гамильтона (3) приобретет следующий вид:

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{o}^{h}\left\{\rho\pi x^2 \operatorname{tg}^2\gamma\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - E\pi x^2 \operatorname{tg}^2\gamma\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left[H\sin\omega t\, \sigma_1(x - x_1) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - 2\pi c x \operatorname{tg}\gamma \sin\omega t\right] y(x,t)\right\} dx\,dt. \tag{9}$$

Для нахождения собственных форм и частот продольных колебаний тела в почве применим метод Ритца [1], согласно которому будем искать гармонические продольные колебания тела в таком виде:

$$y(x,t) = \varphi(x)\sin(pt + \alpha), \tag{10}$$

где $\varphi(x)$ – собственная форма главных колебаний; $p$ – собственная частота главных колебаний.

Поскольку собственные формы и собственные частоты связаны со свободными колебаниями системы, необходимо в функционале (9) выделить ту часть, которая описывает именно свободные колебания системы. Очевидно, что это будет функционал вида

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{h}\left[\rho\pi x^2 \operatorname{tg}^2\gamma\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - E\pi x^2 \operatorname{tg}^2\gamma\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] dx\,dt\,. \tag{11}$$

Подставляя выражение (10) в функционал (11), получаем

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{h}\left\{\rho\pi x^2 \operatorname{tg}^2\gamma\, \varphi^2(x) p^2 \cos^2(p\,t + \alpha) - \right.$$
$$\left. - E\pi x^2 \operatorname{tg}^2\gamma\left[\varphi'(x)\right]^2 \sin^2(p\,t + \alpha)\right\} d\,x\,d\,t. \tag{12}$$

Интегрируя выражение (12) по $t$ в пределах одного периода $T = 2\pi/p$, будем иметь

$$S_2 = \frac{\pi}{2p}\int_{0}^{h}\left\{\rho\pi x^2 \operatorname{tg}^2\gamma\varphi^2(x) p^2 - E\pi x^2 \operatorname{tg}^2\gamma\left[\varphi'(x)\right]^2\right\} dx\,. \tag{13}$$

Согласно методу Ритца, значения функционала (13) рассматриваются на совокупности линейных комбинаций функций, т. е. выражений, имеющих следующий вид:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_i(x), \tag{14}$$

где $\alpha_i$ – параметры, вариациями которых получаем нужный класс допустимых функций; $\psi_i(x)$ – базисные функции, которые специально выбираются и являются известными функциями, удовлетворяющими геометрическим предельным условиям задачи.

Таким образом, подставляя функцию (14) в выражение (13), после соответствующих преобразований получим:

$$S_2 = \frac{\pi}{2p}\int_0^h \left[ \rho\pi x^2 \mathrm{tg}^2\gamma p^2 \sum_{i,k=1}^{n} \psi_i(x)\psi_k(x)\alpha_i\alpha_k - \right. \\ \left. -E\pi x^2 \mathrm{tg}^2\gamma \sum_{i,k=1}^{n} \psi_i'(x)\psi_k'(x)\alpha_i\alpha_k \right] dx. \tag{15}$$

Введем дальше такие обозначения:

$$\int_0^h \rho\pi x^2 \mathrm{tg}^2\gamma\, \psi_i(x)\ \psi_k(x)\, dx = T_{ik}, \\ \int_0^h E\pi x^2 \mathrm{tg}^2\gamma\, \psi_i'(x)\ \psi_k'(x)\, dx = U_{ik}, \tag{16}$$

где $i, k = 1, 2, ..., n.$

Подставляя (16) в (15), получим функционал в виде функции от параметров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$S_2(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \frac{\pi}{2p} p^2 \sum_{i,k=1}^{n} T_{ik}\alpha_i\alpha_k - \frac{\pi}{2p}\sum_{i,k=1}^{n} U_{ik}\alpha_i\alpha_k. \tag{17}$$

Исследуем на экстремум функционал (17). Для этого продифференцируем последний по параметрам $\alpha_i$, $(1, 2, \ldots, n)$ и приравняем к нулю полученные частные производные. В результате получим систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, из которой, в свою очередь, находим уравнение частот Ритца для продольных колебаний сплошного упругого тела, закрепленного в почве:

$$\begin{vmatrix} U_{11} - p^2T_{11} & U_{12} - p^2T_{12} & \ldots & U_{1n} - p^2T_{1n} \\ U_{21} - p^2T_{21} & U_{22} - p^2T_{22} & \ldots & U_{2n} - p^2T_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ U_{n1} - p^2T_{n1} & U_{n2} - p^2T_{n2} & \ldots & U_{nn} - p^2T_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

На практике, как правило, определяют лишь низшие частоты (чаще всего первую и вторую), которые больше влияют на рассматриваемый технологический процесс. Найдем первую и вторую частоты собственных колебаний рассматриваемого тела, для определения которых уравнение (18) приобретет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} U_{11} - p^2T_{11} & U_{12} - p^2T_{12} \\ U_{21} - p^2T_{21} & U_{22} - p^2T_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

В результате решения данного уравнения получаем формулы для нахождения значения первой (основной) частоты:

$$p_1 = \frac{0,662422}{h}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{20}$$

и второй частоты:

$$p_2 = \frac{27,931592}{h}\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{21}$$

Вычислим значение первой и второй частоты для сплошного упругого тела, примером которого может быть корнеплод сахарной свеклы со следующими параметрами [2]: $h = 250$ мм; $E = 18,4\cdot10^6$ Н/м$^2$; $\rho = 1300$ кг/м$^3$. В результате вычислений получим

$$p_1 = \frac{0,662422}{250\cdot 10^{-3}}\sqrt{\frac{18,4\cdot 10^6}{1300}} = 315\ \text{c}^{-1},$$

$$p_2 = \frac{27,931592}{250\cdot 10^{-3}}\sqrt{\frac{18,4\cdot 10^6}{1300}} = 13292\ \text{c}^{-1}.$$

Перейдем к исследованию вынужденных колебаний сплошного упругого тела. Чисто вынужденные колебания будут происходить согласно закону

$$y(x,t) = \varphi(x)\sin\omega t\,, \tag{22}$$

где $\varphi(x)$ – форма вынужденных колебаний.

Для определения формы вынужденных колебаний тела подставим выражение (22) в функционал (9), получим следующий функционал:

$$\begin{aligned} S_3 = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^h \Big\{ & \rho\pi x^2 \mathrm{tg}^2\gamma\omega^2\varphi^2(x)\cos^2\omega t - E\pi x^2\mathrm{tg}^2\gamma\left[\varphi'(x)\right]^2\sin^2\omega t + \\ & + \left[H\sigma_1(x-x_1) - 2\pi c\, x\,\mathrm{tg}\gamma\right]\varphi(x)\sin^2\omega t\Big\}dx\,dt. \end{aligned} \tag{23}$$

Интегрируя выражение (23) по $t$ в пределах одного периода $T = 2\pi/\omega$, будем иметь

$$\begin{aligned} S_4 = \frac{\pi}{2\omega}\int_0^h \Big\{ & \rho\pi x^2\mathrm{tg}^2\gamma\varphi^2(x)\omega^2 - E\pi x^2\mathrm{tg}^2\gamma\left[\varphi'(x)\right]^2 + \\ & + H\sigma_1(x-x_1)\varphi(x) - 2\pi c\, x\,\mathrm{tg}\gamma\ \varphi(x)\Big\}dx. \end{aligned} \tag{24}$$

Согласно методу Ритца, рассмотрим значение функционала (24) на совокупности линейных комбинаций следующего вида:

$$\varphi(x) = \alpha\,\psi(x), \tag{25}$$

где $\alpha$ – параметр, варьированием которого получаем класс допустимых функций; $\psi(x)$ – базисная функция.

Подставляя выражение (25) в функционал (24), получаем:

$$\begin{aligned} S_4 = \frac{\pi}{2\omega}\int_0^h \Big\{ & \rho\pi x^2\mathrm{tg}^2\gamma\alpha^2\psi^2(x)\omega^2 - E\pi x^2\mathrm{tg}^2\gamma\alpha^2\left[\psi'(x)\right]^2 + \\ & + H\sigma_1(x-x_1)\alpha\psi(x) - 2\pi c\, x\ \mathrm{tg}\gamma\alpha\,\psi(x)\Big\}dx. \end{aligned} \tag{26}$$

Введем такие обозначения:

$$\int_0^h \rho\pi x^2\mathrm{tg}^2\gamma\ \psi^2(x)\,dx = T\,, \tag{27}$$

$$\int_0^h E\pi x^2\ \mathrm{tg}^2\gamma\left[\psi'(x)\right]^2 dx = U\,, \tag{28}$$

$$\int_0^h \left[H\sigma_1(x-x_1)\psi(x) - 2\pi c\, x\ \mathrm{tg}\gamma\ \psi(x)\right]dx = L\,. \tag{29}$$

Подставляя выражения (27)–(29) в (26), будем иметь

$$S_4(\alpha)=\frac{\pi}{2\omega}\left(\omega^2 T\alpha^2 - U\alpha^2 + L\,\alpha\right). \tag{30}$$

Таким образом, на совокупности функций (25) функционал (26) превращается в функцию от независимой переменной $\alpha$, имеющую вид (30).

Необходимым условием стационарности функционала (30) (существования экстремума) является равенство нулю его первой вариации:

$$\frac{\partial S_4}{\partial\alpha}\delta\alpha = 0, \tag{31}$$

откуда получаем следующее уравнение:

$$2\omega^2 T\alpha - 2U\alpha + L = 0, \tag{32}$$

из которого находим необходимое значение параметра $\alpha$:

$$\alpha = \frac{L}{2\left(U-\omega^2 T\right)}. \tag{33}$$

Примем за базисную функцию $\psi(t)$ форму вынужденных продольных колебаний стержня постоянного поперечного сечения с одним жестко закрепленным концом, которые возникают под действием продольной гармонической силы частоты $\omega$, приложенной в точке $x = x_1$.

Согласно [1], форма вынужденных колебаний упомянутого стержня имеет такой вид:

$$\psi(x) = D_1 \sin ax \quad \text{при} \quad x \le x_1, \tag{34}$$

$$\psi(x) = D_2 \cos a(h-x) \quad \text{при} \quad x > x_1, \tag{35}$$

где

$$D_1 = -\frac{1}{a\,EF}\frac{\cos a(h-x_1)}{\cos a h}, \tag{36}$$

$$D_2 = -\frac{1}{a\,EF}\frac{\sin a x_1}{\cos a h}, \tag{37}$$

$$a = \omega\sqrt{\frac{\mu}{EF}}, \tag{38}$$

$\mu$ – погонная масса стержня; $F$ – площадь поперечного сечения стержня; $E$ – модуль Юнга для материала стержня; $h$ – длина стержня; $\omega$ – частота вынужденных колебаний стержня.

Вычислив параметры $T$, $U$ и $L$, согласно выражениям (27), (28) и (29), используя зависимость (33), получим необходимое значение параметра $\alpha$, при котором функционал (26) будет иметь стационарное значение:

$$\alpha = \frac{-HD_1 \sin a x_1 + H D_2\left[\cos a(h-x_1)-1\right]-}{2E\pi\,\mathrm{tg}^2\gamma\left[D_1^2\left(\frac{a^2x_1^3}{6}+\frac{x_1^2 a\sin 2ax_1}{4}+\frac{x_1\cos 2ax_1}{4}-\right.\right.}\times$$

$$\times\frac{-2D_1\pi c\,\mathrm{tg}\gamma\left(\frac{\sin ax_1}{a^2}-\frac{x_1\cos ax_1}{a}\right)-}{\left.-\frac{\sin 2ax_1}{8a}\right)-D_2^2\left(\frac{a^2\left(x_1^3-h^3\right)}{6}+\frac{x_1^2 a\sin\left(2ah-2ax_1\right)}{4}+\frac{h}{4}-\right.}\times$$

$$\times\frac{-2D_2\pi c\,\mathrm{tg}\gamma\left[\frac{x_1}{a}\sin a\left(h-x_1\right)-\frac{1}{a^2}\cos a\left(h-x_1\right)+\frac{1}{a^2}\right]}{\left.\left.-\frac{x_1\cos\left(2ah-2ax_1\right)}{4}-\frac{\sin\left(2ah-2ax_1\right)}{8a}\right)\right]-2\omega^2\rho\pi\,\mathrm{tg}^2\gamma\left[D_1^2\left(\frac{x_1^3}{6}-\right.\right.}\times \tag{39}$$

$$\times \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \times$$

$$-\frac{x_1^2 \sin 2ax_1}{4a} - \frac{x_1 \cos 2ax_1}{4a^2} + \frac{\sin 2ax_1}{8a^3}\Bigg) + D_2^2\left(\frac{h^3 - x_1^3}{6} + \right.$$

$$\times \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}\,.$$

$$\left. + \frac{x_1^2 \sin(2ah - 2ax_1)}{4a} + \frac{h}{4a^2} - \frac{x_1 \cos(2ah - 2ax_1)}{4a^2} - \frac{\sin(2ah - 2ax_1)}{8a^3}\right)\Bigg]$$

Учитывая формулы (25), (34) и (35), получим выражения для формы вынужденных колебаний сплошного упругого тела, закрепленного в почве:

$$\varphi(x) = \alpha\, D_1 \sin ax \text{ при } x \le x_1, \quad \varphi(x) = \alpha\, D_2 \cos a(h - x) \text{при } x > x_1, \qquad (40)$$

где $\alpha$ определяется согласно (39).

Подставив выражения (40) в (22), получим закон вынужденных колебаний сплошного упругого тела, закрепленного в почве:

$$y(x,t) = D_1 \alpha \sin ax \sin \omega t \text{ при } x \le x_1, \quad y(x,t) = D_2\, \alpha\, \cos a\,(h - x) \sin \omega t \text{ при } x > x_1. \qquad (41)$$

По результатам теоретических исследований вынужденных колебаний закрепленного в почве сплошного упругого тела проведен конкретный расчет амплитуды указанных колебаний.

П р и м е р. Используем параметры корнеплода сахарной свеклы: длину $h$, угол конусности $\gamma$, модуль Юнга $E$, плотность $\rho$, коэффициент упругой деформации почвы $c$ примем, согласно [2], равными: $h = 250 \cdot 10^{-3}$ м; $\gamma = 14^{\circ}$; $E = 18{,}4 \cdot 10^{6}$ Н/м$^2$; $\rho = 1300$ кг/м$^3$; $c = 1 \cdot 10^5$ Н/м$^2$. Амплитуду $H$ возмущающей силы выбираем в пределах 100–600 Н. Частоту $\omega$ возмущающей силы, согласно [2], примем равной $\omega = 20$ Гц.

Расчет проведен с помощью программы MathCAD с целью определения зависимости амплитуды вынужденных продольных колебаний тела корнеплода от изменения возмущающей силы в диапазоне 100–600 Н для разных поперечных сечений тела.

Как видно из рис. 2, с увеличением величины возмущающей силы амплитуда продольных вынужденных колебаний сплошного упругого тела возрастает по линейному закону. При этом с отдалением площади поперечного сечения тела корнеплода от начала координат $O$ амплитуда также возрастает: при $x = 0{,}07$ м она находится в пределах 1,7–2,3 мм, при $x = 0{,}1$ м – в пределах 2,3–3,5 мм, при $x = 0{,}12$ м – в пределах 2,8–3,9 мм, при $x = 0{,}15$ м (точка захвата) – в пределах 3,2–4,8 мм.

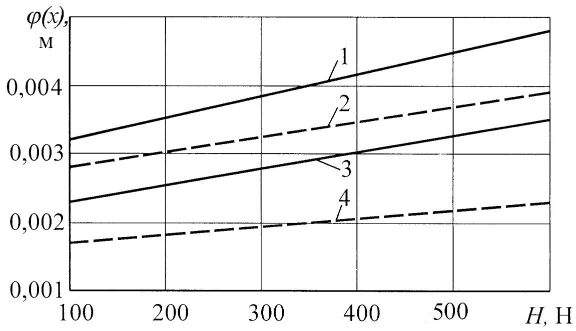


Рис. 2. Зависимость амплитуды продольных вынужденных колебаний сплошного упругого тела от величины возмущающей силы: *1* – $x = 0{,}15$ м, *2* – $x = 0{,}12$ м, *3* – $x = 0{,}10$ м, *4* – $x = 0{,}07$ м

**Заключение.** На основании использования вариационного принципа Остроградского–Гамильтона получены уравнения для вычисления собственных частот любого порядка продольных колебаний сплошного упругого тела с одним закрепленным концом. Так, получены аналитические выражения для нахождения первой и второй собственной частоты, а также формулы для определения амплитуды вынужденных колебаний любого поперечного сечения сплошного упругого тела относительно своего положения равновесия. Данные аналитические исследования дают возможность изучения процесса разрушения связей корнеплода с почвой при его вибрационном выкапывании.

## Литература


1. Б а б а к о в И. М. Теория колебаний. М., 1968.
2. Свеклоуборочные машины (конструирование и расчет) / Л. В. Погорелый, Н. В. Татьянко, В. В. Брей и др. Киев, 1983.



*V. M. BULGAKOV, I. V. HOLOVACH*


**LONGITUDINAL VIBRATIONS OF A CONTINUOUS ELASTIC BODY WITH ONE FIXED END**

## Summary


The longitudinal vibration theory of a continuous elastic body with one fixed end is devised. The Ostrogradskii–Hamilton principle of stationary operation is applied. Using Ritz's method, Ritz's equation of frequencies for a considered oscillatory process is obtained. In particular, analytical expressions for determination of the first and second fundamental frequencies of body vibrations and the amplitude of forced vibrations of any body cross–section are obtained.