ISSN 1817-7204(Print)
ISSN 1817-7239(Online)
УДК [633.1:631.559]:519.87
https://doi.org/10.29235/1817-7204-2021-59-3-304-318

Поступила в редакцию 17.06.2021
Received 17.06.2021

А. П. Лихацевич

Институт мелиорации, Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УРОЖАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ КУЛЬТУР

Аннотация: Теоретической основой представления результатов исследований в сельскохозяйственной науке являются математическая статистика и теория вероятности с применением эмпирических форм обобщения опытных данных. С целью совершенствования методик планирования полевого эксперимента и обработки его данных с использованием цифровых технологий в качестве приоритетного варианта нами предложено использовать математическое моделирование на основе физического принципа баланса причинно-следственных взаимодействий в замкнутой физической системе. При анализе влияния факторов среды на урожайность культур исходные положения, на которых базируется математическое моделирование урожая, не связываются с особенностями культур и природных условий, поэтому варианты модели универсальны по применению и действительны для любой сельскохозяйственной культуры независимо от региона возделывания. Для статистически корректного обеспечения цифровой информацией, исходя из установленных форм математической модели, схема полевого опыта, имеющего целью установление зависимости урожая культуры от урожаеформирующих факторов, должна включать не менее 4 вариантов уровней питания (NPK) с продолжительностью исследований не менее 4 лет. Для проверки точности разработанной модели урожая использованы данные независимых полевых опытов профессора Н. Н. Семененко с ячменем и озимым тритикале. Установлено, что в условиях Беларуси урожаеформирующие факторы по результату своего воздействия на урожай зерновых культур располагаются в следующей убывающей последовательности: суммарная доза вносимых NPK → сумма выпавших атмосферных осадков за активные фазы вегетации → температуры воздуха за тот же период. Расчеты показали, что уменьшение числа учитываемых в математической модели урожаеформирующих факторов с трех (пища, влага, тепло) до двух (пища, влага) снижает точность расчета урожая зерновых культур несущественно.

Ключевые слова: математическое моделирование, факторы среды обитания растений, пищевой режим, увлажнение почвы, тепловой режим, урожайность, сельскохозяйственные культуры, ячмень, озимое тритикале

Для цитирования: Лихацевич, А. П. Математическая модель урожая сельскохозяйственных культур / А. П. Лихацевич // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. аграр. навук. – 2021. – Т. 59, №3. – С. 304–318. https://doi.org/10.29235/1817-7204-2021-59-3-304-318

Anatoly P. Likhatsevich

The Institute of Land Reclamation, the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

MATHEMATICAL MODEL OF AGRICULTURAL CROP YIELD

Abstract: Theoretical basis for presenting research results in agricultural science is mathematical statistics and probability theory using empirical forms of generalization of experimental data. To improve the methods of planning field experiment and processing its data using digital technologies, we proposed to use mathematical modeling based on physical principle of balance of cause-and-effect interactions in a closed physical system as a priority option. When analyzing impact of environmental factors on crop yields, the initial provisions, the mathematical modeling of the crop yield is based, on are not associated with characteristics of crops and natural conditions, therefore, the model options are universal in application and are valid for any agricultural crop, regardless of the region of cultivation. To ensure statistically correct digital information, based on the established forms of mathematical model, the field experiment layout aimed at establishing the dependence of the crop yield on yield-forming factors should include at least 4 options for nutritional levels (NPK) with a research duration of at least 4 years. To check the accuracy of the developed crop yield model, the data of independent field experiments of Professor N. N. Semenenko with barley and winter triticale has been used. It has been determined that, in Belarus, yield-forming factors, as a result of their impact on the grain yield, are arranged in the following decreasing sequence: total dose of applied NPK → the amount of precipitation during the active phases of growing season → air temperature for the same period. Calculations have shown that decrease in the number of yield-forming factors taken into account in the mathematical model from three (food, moisture and heat) to two (food and moisture) reduces the accuracy of calculating the grain crop yield insignificantly.

Keywords: mathematical modeling, plant habitat factors, food regime, soil moisture, thermal regime, yield, agricultural crops, barley, winter triticale

© Лихацевич А. П., 2021

Национальная академия наук Беларуси

For citation: Likhatsevich A.P. Mathematical model of agricultural crop yield. *Vestsi Natsyyanal'nay akademii navuk Belarusi. Seryya agrarnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Agrarian series,* 2021, vol. 59, no 3, pp. 304-318 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1817-7204-2021-59-3-304-318

Введение. Теоретической основой представления результатов исследований в сельскохозяйственной науке являются математическая статистика и теория вероятности с применением в основном эмпирических форм обобщения опытных данных. Весьма редко используется математический аппарат теории планирования эксперимента. Это вполне объяснимо, поскольку основные положения теории планирования эксперимента справедливы при проведении активного опыта, в котором могут присутствовать только управляемые переменные [1]. В аграрной науке, связанной с изучением воздействия на сельскохозяйственные культуры не только техногенных управляемых, но и природных неуправляемых факторов с непредсказуемой динамикой, использование математической теории планирования эксперимента весьма ограничено. Для цифрового описания изучаемых процессов (например, результатов воздействия условий окружающей среды на урожай) привлекается неконтролируемое множество эмпирических уравнений произвольной структуры, зависящей от субъективных предпочтений их авторов [2–26].

Вместе с тем существуют объективные причины, ограничивающие использование подобных эмпирических формул в земледельческой науке. Неоднократно было показано, что эти формулы при любом коэффициенте детерминации не являются действительными моделями исследуемых процессов, поскольку не имеют физического смысла, а представляют собой лишь формальное математическое сглаживание данных конкретных экспериментов [27, 28]. Поэтому эмпирико-статистические методики обработки данных полевого опыта всегда являются частным решением, результаты которого весьма сложно распространить даже на подобные исследования, но выполненные в других условиях. Множество эмпирических зависимостей, предлагаемых для обобщения опытных данных, в земледельческой науке прогрессивно возрастает, вступая в противоречие с традиционным стремлением ученых к единообразию и порядку, свойственным высокоорганизованному научному процессу. Остро ощущается необходимость разработки единой методологии обработки данных полевого агрономического опыта. Для решения этой проблемы в качестве методологической основы предлагается использовать математическое моделирование.

Формы математической модели урожая. Математическая модель объекта исследований – это математическое выражение, содержательно отражающее свойства изучаемого объекта, в частности структуру и количественные связи, его характеризующие. Как и в математической теории планирования эксперимента, нами рассматриваются модели, основанные на результатах эксперимента, т. е. только экспериментальные математические модели, которые часто называют статистическими моделями [1]. Основной особенностью экспериментальных математических (статистических) моделей является то, что они описывают поведение объекта в среднем, характеризуя его неслучайные свойства. С помощью подобной модели нельзя абсолютно точно предсказать конечный результат в каждом опыте, но с ее помощью можно со свойственной данной модели погрешностью указать, вокруг какого центра будут группироваться значения при заданном сочетании показателей факторов, если для этого сочетания опыты повторять многократно.

Процесс формирования урожая в течение вегетации можно представить как функцию, в которой аргументами являются урожаеформирующие факторы (природные и техногенные). Накопление урожая можно рассматривать, например, в динамике как следствие воздействия изменяющихся во времени урожаеформирующих факторов. Подобную динамическую модель урожая предлагал, например, В. П. Дмитренко [29]. Отсутствие теоретического развития подобного моделирования и практического его применения в течение последних 45 лет связано не столько со сложностью модели, сколько с ограниченностью ее цифрового обеспечения. В отличие от динамической, в статической модели урожая рассматривается зависимость конечного урожая от суммарного влияния урожаеформирующих факторов не в процессе роста культуры, а сразу в целом за вегетацию. Безусловно, разработка статической математической модели урожая проще, чем динамическое моделирование. Но до настоящего времени продвижение научных исследований даже в этом направлении идет весьма медленно, хотя именно здесь следует ожидать прорывных результатов.

Национальная академия наук Беларуси

Как и в предыдущей публикации [30], в качестве теоретической основы моделирования урожая нами используется физический принцип баланса причинно-следственных взаимодействий в замкнутой физической системе, который в рамках данной задачи формулируется следующим образом:

1) бесконечно малое изменение урожая под воздействием урожаеформирующих факторов пропорционально произведению показателя восприимчивости урожая к действию любого из факторов на характеристику воздействия каждого из них;

2) каждый из факторов, действующих на урожай, сообщает ему изменение, не зависящее от воздействий других факторов.

Заметим, что сформулированный выше физический принцип баланса причинно-следственных взаимодействий в замкнутой физической системе априори предполагает независимость взаимодействующих факторов друг от друга. Формально этот принцип для математической модели урожая можно представить в виде следующего обобщающего выражения:

$$\frac{\partial Y}{\partial R_i} = \alpha_i f\left(\frac{Y_{\max}, Y}{R_{i(\mathrm{opt})}, R_i, R_{i(\min,\max)}}\right) g\left(\frac{R_{i(\mathrm{opt})}, R_i}{R_{i(\mathrm{opt})}, R_i, R_{i(\min,\max)}}\right), \quad (1)$$

где $\partial Y/\partial R_i$ – частная производная функции урожая (Y) по i-му фактору (R_i), соответствующая скорости изменения Y при изменении R_i, при условии, что другие факторы (аргументы функции) не меняются; α_i – безразмерная константа, характеризующая интенсивность изменения Y под воздействием i-го фактора; f – функция, характеризующая восприимчивость урожая по отношению к воздействию i-го фактора; R_i – обобщенное представление i-го урожаеформирующего фактора с его оптимумом ($R_{i(\mathrm{opt})}$), допустимыми минимумом ($R_{i(\min)}$) или максимумом ($R_{i(\max)}$); g – функция, характеризующая управляющее воздействие i-го фактора на урожай.

Вид функций f и g задается на основании данных опыта, которые формируют поле контролируемых переменных (Y, R_i). Раскроем этот процесс на примере построения зависимости урожая от воздействия первого фактора R_1 (уровня минерального питания растений) и двух других факторов – R_2, R_3 (увлажненности вегетационного периода и его теплообеспеченности соответственно). Очевидно, что данная задача не тривиальна, поскольку ее решение включает учет как контролируемого и управляемого фактора (дозы удобрений), так и контролируемых, но неуправляемых (увлажнения и теплообеспеченности фаз вегетации культуры).

Известно, что максимальный урожай может быть получен, если каждый из названных факторов имеет оптимальное значение для конкретной культуры. Этот урожай соответствует потенциалу культуры. Кроме того, растения, как объект воздействия условий окружающей среды, при формировании урожая накладывают двустороннее ограничение (по минимуму и максимуму) на каждый фактор. Исходя из отмеченных граничных условий, упростим задачу и будем рассматривать только интересующие нас области функции (1). Например, при направленном регулировании пищевого режима наиболее предпочтительно построение модели в области с повышением доз вносимых удобрений от некоторого минимума до оптимального уровня, а при регулировании водного режима растений следует отдельно анализировать области либо снижения влагообеспеченности от максимума до оптимума (при ликвидации переувлажнения) или ее целенаправленного повышения от минимума до оптимума (при проведении дополнительного увлажнения в засушливых условиях). В свою очередь, поскольку тепловой фактор в полевых опытах, как правило, не регулируется, в анализе можно использовать и область роста теплового воздействия на урожай (от оптимума до максимума), и область недостатка тепла (от минимума до оптимума). Выбор зависит от тепловых предпочтений исследуемой культуры и региона ее возделывания.

При выборе функций f и g в формуле (1) нами учтены установленные опытным путем следующие закономерности [2–31]:

1) растения являются системой с памятью, т. е. прирост урожая зависит от условий его формирования, определяемых факторами среды;

2) если условия среды (влага, пища, тепло и др.) находятся в оптимуме, то растения образуют максимум урожая;

3) при отклонении фактора от оптимального значения в любую сторону (к минимуму или к максимуму) растения испытывают стресс, который снижает урожай;

Национальная академия наук Беларуси

4) величина отклонения фактических значений факторов среды (доз вносимых удобрений, влагообеспеченности культуры, температуры воздуха и др.) от их оптимума определяет величину стресса, испытываемого растениями при формировании урожая;

5) с приближением условий среды к оптимуму прирост урожая замедляется;

6) урожаеформирующие факторы равноценны по влиянию на растения и не могут заменить друг друга;

7) наибольшее влияние на снижение урожая оказывает фактор, находящийся в минимуме.

Для обобщения установленных закономерностей можно использовать несколько математических выражений. Например, в работе [30] составные элементы выражения (1), формализующего принцип баланса причинно-следственных взаимодействий в системе «факторы среды (причина) – урожай (следствие)», приведены в наиболее сложной форме с целью охватить все поле контролируемых переменных, управляющих поведением функции в пределах $0 \leqslant Y \leqslant Y_{\max}$. Однако в полевых опытах и в производственных условиях такой диапазон изменения урожая не наблюдается. Обычно этот диапазон ограничивается пределами $Y_{\min} \leqslant Y \leqslant Y_{\max}$.

Результаты анализа многочисленных данных [2–31] показывают, что в пределах $0{,}3R_{i(\text{opt})} < R_i < 1{,}7R_{i(\text{opt})}$ принцип баланса причинно-следственных взаимодействий в системе «факторы среды (причина) – урожай (следствие)» можно представить в упрощенном виде, а именно:

– восприимчивость (проводимость) урожая к действию *i*-го фактора пропорциональна отношению величины урожая (по *i*-му фактору) к максимально возможной величине стресса от воздействия фактора, т. е.

$$f\left(\frac{Y_{\max}, Y}{R_{i(\text{opt})}, R_i, R_{i(\min,\max)}}\right) = \frac{Y}{R_{i(\text{opt})} - R_{i(\min,\max)}}, \tag{2}$$

где Y – урожай; $R_{i(\text{opt})}$ – оптимальное значение *i*-го фактора, при котором урожай достигает своего максимума; $R_{i(\min,\max)}$ – минимальное или максимальное значение *i*-го фактора, при котором урожай не формируется;

– характеристика управляющего воздействия *i*-го фактора на урожай равна относительной величине стресса от воздействия данного фактора, который равен отношению стресса от фактического недостатка фактора до оптимума к возможному его максимуму, т. е.

$$g\left(\frac{R_{i(\text{opt})}, R_i}{R_{i(\text{opt})}, R_i, R_{i(\min,\max)}}\right) = \frac{R_{i(\text{opt})} - R_i}{R_{i(\text{opt})} - R_{i(\min,\max)}} \tag{3}$$

(R_i – фактическое значение *i*-го фактора среды).

С учетом зависимостей (2), (3) решением дифференциального уравнения (1) является

$$\frac{Y}{Y_{n(\max)}} = exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left[a_i\left(\frac{R_{i(\text{opt})} - R_i}{R_{i(\text{opt})} - R_{i(\min,\max)}}\right)^2\right]\right\}, \tag{4}$$

где $Y_{n(\max)}$ – максимум урожая при учете *n*-х факторов; *n* – количество учитываемых факторов.

Анализ опытных данных показывает, что восприимчивость (проводимость) урожая к действию *i*-го фактора (функцию *f*) в окрестностях $Y_{\max}$ можно свести к более простому соотношению:

$$f\left(\frac{Y_{(\text{opt})}, Y}{R_{i(\text{opt})}, R_i, R_{i(\min,\max)}}\right) = \frac{Y_{n(\max)}}{R_{i(\text{opt})} - R_{i(\min,\max)}}. \tag{5}$$

Из выражений (3), (5) получим

$$\frac{Y}{Y_{n(\max)}} = \prod_{i=1}^{n}\left[1 - a_i\left(\frac{R_{i(\text{opt})} - R_i}{R_{i(\text{opt})} - R_{i(\min,\max)}}\right)^2\right]. \tag{6}$$

Национальная академия наук Беларуси

Заметим, что благодаря мультипликативной форме зависимостей (4), (6), в них, во-первых, априори соблюдается упомянутый выше «закон минимума». Во-вторых, в отличие от использования известной методики планирования эксперимента [1], целью которой является построение регрессионных зависимостей в виде многочленных полиномов с ограниченным числом переменных, мультипликативные функции (4) и (6) не только являются математическими моделями урожая, в которых каждая составляющая имеет конкретную физическую природу, но и могут включать неограниченное число переменных.

Наиболее сложным и ответственным действием в предлагаемой нами схеме математического моделирования урожая является установление исходных зависимостей вида (2), (3) и (5). В первую очередь при этом требуется соблюдение следующих условий: необходимым условием является полное соответствие предлагаемых зависимостей физическим закономерностям, установленным в опытах; достаточное условие состоит в обязательном соблюдении баланса размерностей всех показателей, входящих в предлагаемые формы связи (2), (3) и (5).

Раскроем формулу (4), добавив к регулируемому минеральному питанию нерегулируемые в опыте факторы – влаго- и теплообеспеченность вегетации. В этом случае

$$\frac{Y}{Y_{3(\max)}} = exp\left\{-\left[a_{\mathrm{NPK}}\left(\frac{\mathrm{NPK_{opt}}-\mathrm{NPK}}{\mathrm{NPK_{opt}}-\mathrm{NPK_{min}}}\right)^2+a_S\left(\frac{S_{\mathrm{opt}}-S}{S_{\mathrm{opt}}-S_{\min(\max)}}\right)^2+a_T\left(\frac{T_{\mathrm{opt}}-T}{T_{\mathrm{opt}}-T_{\min(\max)}}\right)^2\right]\right\}, \quad (7)$$

где $Y_{3(\max)}$ – максимум урожая, полученный при учете 3 урожаеформирующих факторов среды обитания растений (NPK, S, T); NPK, S, T – вносимая в течение вегетации суммарная доза NPK, суммарные (для зерновых культур за май-июль) атмосферные осадки и максимальная суточная температура воздуха (для зерновых культур средняя за май-июль) соответственно; a_{NPK}, a_S, a_T – коэффициенты, характеризующие степень влияния пищи, влаги и тепла, соответственно, на урожай; $\mathrm{NPK_{opt}}$, S_{opt}, T_{opt} – оптимальные количества питательных веществ (сумма действующего вещества азота, фосфора, калия), сумма атмосферных осадков и максимальная температура воздуха, при которых достигается максимум урожая соответственно; $\mathrm{NPK_{min}}$, $S_{\min(\max)}$, $T_{\min(\max)}$ – граничные показатели (доза NPK, сумма осадков и температура воздуха соответственно), при которых урожай не формируется.

Аналогичные действия выполним с формулой (6). Получим

$$\frac{Y}{Y_{3(\max)}} = \left[1-a_{\mathrm{NPK}}\left(\frac{\mathrm{NPK_{opt}}-\mathrm{NPK}}{\mathrm{NPK_{opt}}-\mathrm{NPK_{min}}}\right)^2\right]\left[1-a_S\left(\frac{S_{\mathrm{opt}}-S}{S_{\mathrm{opt}}-S_{\min(\max)}}\right)^2\right]\left[1-a_T\left(\frac{T_{\mathrm{opt}}-T}{T_{\mathrm{opt}}-T_{\min(\max)}}\right)^2\right]. \quad (8)$$

Приведенные нами обобщающие функции (4), (6) и их частные выражения (7), (8) представляют собой варианты математической модели урожая. Эти зависимости, характеризующие взаимосвязь трех основных факторов среды и урожая, можно с успехом применять в любых регионах в любых почвенно-климатических условиях, используя их, например, для программирования (моделирования) урожая, оптимизации распределения ресурсов в земледелии и других целей.

Формулы (7), (8) можно привести к более простой форме, рассматривающей воздействие на урожай только двух факторов – удобрений и влаги либо только удобрений и тепла. Результаты многолетних исследований показывают, что в климатических условиях Беларуси по биологической эффективности своего воздействия на урожай на первом месте находится уровень питания (удобрения), на втором – почвенная влага, на третьем – тепло. Поэтому для двухфакторного эксперимента будут справедливы следующие формы математической модели урожая:

$$\frac{Y}{Y_{2(\max)}} = exp\left\{-\left[a_{\mathrm{NPK}}\left(\frac{\mathrm{NPK_{opt}}-\mathrm{NPK}}{\mathrm{NPK_{opt}}-\mathrm{NPK_{min}}}\right)^2+a_S\left(\frac{S_{\mathrm{opt}}-S}{S_{\mathrm{opt}}-S_{\min(\max)}}\right)^2\right]\right\}, \quad (9)$$

$$\frac{Y}{Y_{2(\max)}} = \left[1-a_{\mathrm{NPK}}\left(\frac{\mathrm{NPK_{opt}}-\mathrm{NPK}}{\mathrm{NPK_{opt}}-\mathrm{NPK_{min}}}\right)^2\right]\left[1-a_S\left(\frac{S_{\mathrm{opt}}-S}{S_{\mathrm{opt}}-S_{\min(\max)}}\right)^2\right], \quad (10)$$

Национальная академия наук Беларуси

где $Y_{2(max)}$ – максимум урожая, полученный при учете 2 урожаеформирующих факторов среды обитания растений (питания – NPK и суммы атмосферных осадков – S).

Отметим, что измерение выбранных показателей влаго- и теплообеспеченности (атмосферных осадков и максимальных суточных температур воздуха), необходимых для насыщения цифровой информацией приведенных выше форм математической модели урожая, может организовать на опытном участке любой исследователь, в отличие от необходимых измерений и вычислений, например, среднесуточной температуры воздуха, получение которой под силу только специалистам на метеостанциях или соответствующим образом оборудованных метеопостах. Именно это обстоятельство послужило причиной ориентации не на среднесуточную, а на максимальную суточную температуру воздуха при выборе показателя теплообеспеченности фаз вегетационного периода. В представленных выше вариантах математической модели урожая (7)–(10) учитываются либо три (суммарная доза вносимых минеральных удобрений, сумма атмосферных осадков, максимальные суточные температуры воздуха), либо два (суммарная доза вносимых минеральных удобрений и сумма атмосферных осадков) урожаеформирующих фактора.

Заметим, что исходные положения, использованные нами при теоретических построениях, не связаны с какими-либо ограничениями, поэтому математическая модель урожая, представленная в виде криволинейных функций (экспонента, парабола), действительна для любой сельскохозяйственной культуры в любых условиях ее возделывания.

Первичный анализ данных полевого опыта. Оценить точность модели урожая возможно только по результатам независимого эксперимента, в качестве которого нами использованы данные исследований доктора сельскохозяйственных наук, профессора Н. Н. Семененко, изучавшего влияние минерального питания на урожай ячменя и озимого тритикале, возделываемых на осушенных органогенных почвах Полесья, сельское хозяйство которого ориентировано на производство молока и мяса. Главной задачей земледелия этой зоны является улучшение кормовой базы животноводства, прежде всего повышения урожайности, валовых сборов и качества фуражного зерна [19].

Ниже приводим данные по озимому тритикале, поскольку для ячменя подобный анализ выполнен нами ранее [30]. В качестве примера на рис. 1 показаны эмпирические аппроксимации параболическими функциями экспериментальных данных зависимости урожая озимого тритикале от доз вносимых удобрений.

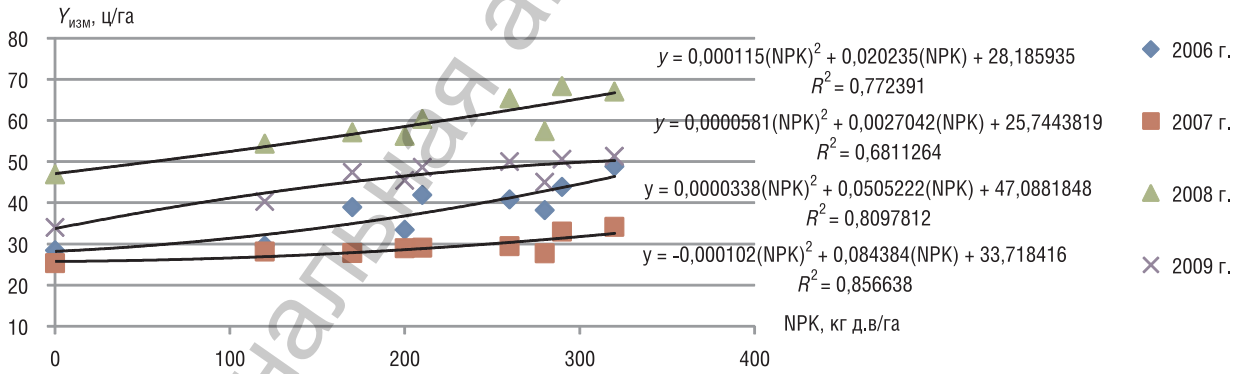

Рис. 1. Зависимость урожая озимого тритикале в годы исследований от доз вносимых удобрений

Fig. 1. Dependence of winter triticale yield during the research years on fertilizer doses

Источник: Семененко Н. Н. Торфяно-болотные почвы Полесья: трансформация и пути эффективного использования. Минск: Беларус. навука, 2015. 282 с.

Привести 4-летние данные Н. Н. Семененко (рис. 1) к одной функции с помощью обычного осреднения, как принято при обработке данных агрономического опыта, весьма сложно, поскольку только в условиях 2009 г. аппроксимирующая кривая имеет максимум. В другие годы исследований аппроксимирующие параболы монотонно возрастают при увеличении доз удобрений.

Конечно, для всех лет исследований данную закономерность можно представить с добавлением в обобщающую аппроксимирующую функцию дополнительной координаты, например,

Национальная академия наук Беларуси

суммы атмосферных осадков (и оросительной нормы при орошении культуры). Например, в работах [25, 26] приведены формулы в виде трехмерной параболической поверхности, которые в принятых обозначениях имеют следующий вид:

$$Y = A(\mathrm{NPK})^2 + B(\mathrm{NPK}) + CS^2 + DS + E(\mathrm{NPK})S + H, \quad (11)$$

где *A, B, C, D, E, H* – эмпирические численные коэффициенты (подобны приведенным на рис. 1) при переменных NPK и *S*.

Коэффициенты детерминации функций (11), приведенных в статьях [25, 26], достаточно высоки (0,93–0,95). Но повторим, что любые эмпирические зависимости вида (11) не являются математической моделью урожая, а представляют собой лишь эмпирическую аппроксимацию данных опыта. С изменением количества обрабатываемых опытных точек численные значения эмпирических коэффициентов (*A, B, C, D, E, H* и др.) в зависимостях вида (11) будут меняться. Увязать эти изменения с урожаеформирующими факторами или любыми другими физическими показателями невозможно. Поэтому все попытки исследователей, аппроксимируя результаты опытов произвольными эмпирическими функциями, доказывать, что эти уравнения есть математические модели, не приводят к успеху. Это лишь промежуточный этап численного анализа, позволяющий установить наличие количественных связей в исследуемом процессе и их погрешность (коэффициенты детерминации), и не более того.

Качественный шаг в обработке опытных данных состоит в построении математической модели, базирующейся на научно обоснованных физических принципах и законах. Например, теоретической основой моделирования урожая служит сформулированный выше физический принцип баланса причинно-следственных взаимодействий в замкнутой физической системе (1), который в рамках поставленной задачи позволил получить формулы (7)–(10).

В математическую модель урожая зерновых культур помимо удобрений (NPK) в число контролируемых факторов среды нами дополнительно включены показатели увлажненности (сумма атмосферных осадков за май-июль) и теплообеспеченности (средняя за май-июль максимальная за сутки температура воздуха), измеряемые на метеостанции Полесская, расположенной на расстоянии около 0,5 км от опытного участка. Средняя за май-июль максимальная суточная температура воздуха принята нами в качестве показателя теплового режима вегетации только по причине простоты ее измерения. Для этой цели можно использовать среднесуточную температуру воздуха за установленный период или сумму среднесуточных температур. Но, как отмечено выше, получение среднесуточной температуры воздуха сопряжено с трудностями, состоящими в сложности реализации методики измерения этих величин в условиях агрономического опыта.

Оценка точности вариантов математической модели урожая. Основой вариантов математической модели урожая (7)–(10) являются ее константы (опорные показатели). К ним относятся:

1) $\boldsymbol{Y}_{n(\max)}$ – максимум урожая, полученный при учете «*n*» урожаеформирующих факторов среды обитания растений. Данный максимум соответствует потенциальному урожаю данной культуры в условиях исследований;

2) $\boldsymbol{a}_{\mathrm{NPK}}$, $\boldsymbol{a}_S$, $\boldsymbol{a}_T$ – коэффициенты, характеризующие влияние минерального питания, влаги и тепла на урожай соответственно;

3) $\mathbf{NPK}_{\mathrm{opt}}$, $\boldsymbol{S}_{\mathrm{opt}}$, $\boldsymbol{T}_{\mathrm{opt}}$ – оптимальные количества питательных веществ (сумма вносимых действующих веществ азота, фосфора, калия), атмосферных осадков (суммы за май-июль) и максимальной за сутки температуры воздуха (средней за май-июль), при которых достигается максимум урожая, соответственно;

4) $\mathbf{NPK}_{\min}$, $\boldsymbol{S}_{\min(\max)}$, $\boldsymbol{T}_{\min(\max)}$ – граничные показатели модели (суммарная доза NPK, атмосферных осадков и максимальная за сутки температура воздуха соответственно), при которых урожай не формируется.

Как указано выше, для установления фактических значений опорных показателей математической модели урожая зерновых культур мы использовали результаты исследований доктора сельскохозяйственных наук, профессора Н. Н. Семененко [19].

В табл. 1 приведены установленные методом подбора опорные показатели разных вариантов математической модели урожая (7)–(10) для зерновых культур – озимого тритикале и ячменя. Как признак равнозначности влияния на растения учитываемых урожаеформирующих факто-

Национальная академия наук Беларуси

ров (пищи, влаги, тепла) коэффициенты (a_{NPK}, a_S, a_T), характеризующие вклад каждого фактора в урожай, приняты равными единице.

Согласно данным табл. 1, можем утверждать, что с увеличением числа учитываемых урожаеформирующих факторов соответствующий им в расчетных формулах максимум урожая ($Y_{n(max)}$) возрастает, т. е.

$$Y_{n-1(\max)} < Y_{n(\max)}. \quad (12)$$

Таблица 1. **Опорные показатели математической модели урожая озимого тритикале и ячменя**

Table 1. **Benchmarks of mathematical model of winter triticale and barley yield**

Опорные показатели модели урожая	Озимое тритикале				Ячмень			
	Расчет по формуле							
	(7)	(8)	(9)	(10)	(7)	(8)	(9)	(10)
$Y_{n(max)}$, ц/га	81,5	80,5	77,9	77,9	80,9	80,6	71,1	71,0
a_{NPK}	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
a_S	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
a_T	1,0	1,0	–	–	1,0	1,0	–	–
NPK_{opt}, кг д.в/га	770	820	690	740	420	470	470	520
NPK_{min}, кг д.в/га	–240	–410	–280	–400	–180	–270	–190	–290
S_{opt}, мм	239	240	240	240	218	222	208	209
S_{max}, мм	390	400	370	387	365	390	382	408
T_{opt}, °С	22,1	21,6	–	–	25,0	24,8	–	–
T_{max}, °С	26,3	28,0	–	–	32,1	34,8	–	–

Например, для озимого тритикале максимум урожая ($Y_{n(max)}$) повышается от 77,9 ц/га до 80,5–81,5 ц/га. Для ячменя повышение максимума урожая еще существеннее – от 71,0–71,1 до 80,6–80,9 ц/га. Как указывалось выше, полученные значения $Y_{n(max)}$ характеризуют потенциал урожайности данных зерновых культур в Полесском регионе. Указанная урожайность – это верхний предел, соответствующий оптимальному сочетанию значений основных урожаеформирующих факторов: пищи, влаги и тепла. Вероятность такого сочетания в природе крайне мала, но в математической модели оно присутствует.

Сравнение измеренных в поле [19, табл. 1.13, с. 148] и вычисленных с использованием опорных показателей модели (табл. 1) по формулам (7)–(10) урожаев озимого тритикале выполнено в табл. 2. В табл. 3 приведено аналогичное сравнение урожаев ячменя, измеренных в поле [19, табл. 1.12, с. 147] и вычисленных по формулам (7)–(10). Как видим, полученные в опытах Н. Н. Семененко наибольшие урожаи культур (озимое тритикале – 68,3 ц/га, ячмень – 71,1 ц/га) намного ниже потенциала урожайности данных зерновых культур (табл. 1), что вполне закономерно исходя из неоптимальности условий среды в годы исследований.

Годы исследований различались по влаго- и теплообеспеченности [19]. Например, 2005 и 2006 гг. были засушливыми и средними по теплообеспеченности, 2007 г. характеризовался высоким увлажнением и высокими температурами, 2008 г. был средневлажным и средним по теплообеспеченности, 2009 г. характеризовался повышенным увлажнением и средними температурами. При этом наиболее высокие урожаи зерновых культур получены в 2008 г., который по влаго- и теплообеспеченности вегетационного периода близок к среднемноголетнему. А самые низкие урожаи ячменя и озимого тритикале имели место в 2007 г. с высоким увлажнением и высокими температурами. Следовательно, в качестве важного результата исследований профессора Н. Н. Семененко можно отметить установленную негативную реакцию ячменя и озимого тритикале на переувлажнение и повышенные температуры.

Поскольку нами рассматривается математическая модель урожая, имеющая статистическую основу, в табл. 4 указаны пределы ее применения, установленные с учетом полученных в расчетах и наблюдаемых в опытах границах изменения контролируемых переменных (урожаеформирующих факторов).

Национальная академия наук Беларуси

Таблица 2. **Сравнение измеренной в поле и вычисленной по формулам (7)–(10) урожайности озимого тритикале**

Table 2. **Comparison of winter triticale yield measured in the field and calculated by formulas (7)-(10)**

Данные полевого опыта							Результаты расчета по формулам							
Год	Дозы NPK,	№ п/п (m)	Сумма вносимых NPK, кг д.в/га	Урожай ($Y_{изм}$), ц/га	Атмосферные осадки, сумма за май-июль, мм	Максимальная суточная температура воздуха, средняя за май-июль, °С	(7)		(8)		(9)		(10)	
							$Y_{расч}$	$(Y_{расч}-Y_{изм})^2$	$Y_{расч}$	$(Y_{расч}-Y_{изм})^2$	$Y_{расч}$	$(Y_{расч}-Y_{изм})^2$	$Y_{расч}$	$(Y_{расч}-Y_{изм})^2$
2006	б/у	1	0	28,4	151	23,4	29,5	1,2	28,4	0,0	29,4	1,0	28,6	0,0
	$P_{40}K_{80}$	2	120	29,6	151	23,4	34,8	27, 5	34,6	25,1	34,5	24,2	34,7	26,5
	$P_{80}K_{120}$	3	200	33,4	151	23,4	38,3	24,5	38,2	22,9	37,8	19,1	38,3	23,7
	$P_{120}K_{160}$	4	280	38,2	151	23,4	41,7	12,0	41,3	9,8	40,8	6,6	41,3	9,7
	$P_{80}+N_{90}$	5	170	38,9	151	23,4	37,0	3,4	36,9	4,0	36,6	5,4	37,0	3,6
	$K_{120}+N_{90}$	6	210	41,9	151	23,4	38,8	9,8	38,6	10,9	38,2	14,0	38,7	10,4
	$P_{80}K_{120}+N_{60}$	7	260	40,8	151	23,4	40,9	0,0	40,6	0,0	40,1	0,6	40,6	0,0
	$P_{80}K_{120}+N_{90}$	8	290	43,8	151	23,4	42,1	3,0	41,7	4,5	41,1	7,1	41,7	4,6
	$P_{80}K_{120}+N_{120}$	9	320	48,8	151	23,4	43,2	31,0	42,7	36,8	42,1	44,2	42,6	37,9
2007	б/у	10	0	25,3	344	24,1	22,4	8,4	21,9	11,7	24,8	0,3	22,5	7,8
	$P_{40}K_{80}$	11	120	28,1	344	24,1	26,5	2,6	26,6	2,1	29,1	1,0	27,4	0,5
	$P_{80}K_{120}$	12	200	28,9	344	24,1	29,1	0,1	29,4	0,2	31,8	8,6	30,2	1,6
	$P_{120}K_{160}$	13	280	27,7	344	24,1	31,7	15,7	31,8	16,8	34,4	44,3	32,6	23,8
	$P_{80}+N_{90}$	14	170	27,8	344	24,1	28,1	0,1	28,4	0,4	30,8	9,1	29,2	1,9
	$K_{120}+N_{90}$	15	210	29,1	344	24,1	29,5	0,1	29,7	0,4	32,2	9,3	30,5	2,0
	$P_{80}K_{120}+N_{60}$	16	260	29,4	344	24,1	31,0	2,7	31,2	3,3	33,7	18,9	32,0	6,8
	$P_{80}K_{120}+N_{90}$	17	290	33,0	344	24,1	32,0	1,1	32,1	0,8	34,7	2,7	32,8	0,0
	$P_{80}K_{120}+N_{120}$	18	320	34,1	344	24,1	32,8	1,6	32,9	1,5	35,5	2,0	33,6	0,2
2008	б/у	19	0	46,9	230	22,1	45,4	2,2	44,3	6,9	46,7	0,0	44,9	4,1
	$P_{40}K_{80}$	20	120	54,3	230	22,1	53,7	0,4	53,9	0,2	54,8	0,3	54,6	0,1
	$P_{80}K_{120}$	21	200	56,2	230	22,1	59,1	8,2	59,4	10,5	60,0	14,4	60,1	15,5
	$P_{120}K_{160}$	22	280	57,4	230	22,1	64,2	46,0	64,3	48,1	64,8	54,3	64,9	56,5
	$P_{80}+N_{90}$	23	170	57,1	230	22,1	57,1	0,0	57,4	0,1	58,1	1,0	58,2	1,1
	$K_{120}+N_{90}$	24	210	60,3	230	22,1	59,7	0,3	60,1	0,0	60,6	0,1	60,8	0,2
	$P_{80}K_{120}+N_{60}$	25	260	65,3	230	22,1	62,9	5,6	63,2	4,5	63,6	2,8	63,8	2,3
	$P_{80}K_{120}+N_{90}$	26	290	68,3	230	22,1	64,8	12,3	64,9	11,6	65,3	8,8	65,5	8,1
	$P_{80}K_{120}+N_{120}$	27	320	67,0	230	22,1	66,6	0,2	66,5	0,2	67,0	0,0	67,0	0,0
2009	б/у	28	0	34,0	316	22,4	35,0	0,9	34,1	0,0	33,4	0,4	33,0	0,9
	$P_{40}K_{80}$	29	120	40,3	316	22,4	41,3	1,0	41,5	1,4	39,2	1,2	40,2	0,0
	$P_{80}K_{120}$	30	200	45,4	316	22,4	45,5	0,0	45,8	0,1	42,9	6,3	44,3	1,3
	$P_{120}K_{160}$	31	280	45,0	316	22,4	49,4	19,4	49,5	20,6	46,3	1,7	47,8	7,8
	$P_{80}+N_{90}$	32	170	47,4	316	22,4	43,9	12,1	44,2	10,1	41,5	34,5	42,8	21,1
	$K_{120}+N_{90}$	33	210	48,6	316	22,4	46,0	6,9	46,3	5,4	43,3	27,8	44,7	14,9
	$P_{80}K_{120}+N_{60}$	34	260	50,0	316	22,4	48,4	2,4	48,6	1,8	45,5	20,5	47,0	9,3
	$P_{80}K_{120}+N_{90}$	35	290	50,6	316	22,4	49,9	0,5	50,0	0,4	46,7	15,3	48,2	5,8
	$P_{80}K_{120}+N_{120}$	36	320	51,3	316	22,4	51,3	0,0	51,2	0,0	47,9	11,9	49,3	3,9
2006–2009 гг. Ошибка опыта ($НСР_{05}$), ц/га							**1,8–3,3**							
2006–2009 гг. Ошибка расчета (δ), ц/га							2,7		2,8		3,5		3,0	

Источник: Семененко Н. Н. Торфяно-болотные почвы Полесья: трансформация и пути эффективного использования. Минск: Беларус. навука, 2015. С. 148.

Национальная академия наук Беларуси

Таблица 3. **Влияние удобрений и погодных условий на урожайность ячменя**

Table 3. **Impact of fertilizers and weather conditions on barley yield**

Данные полевого опыта							Результаты расчета по формулам							
							(7)		(8)		(9)		(10)	
Год	Дозы NPK,	№ п/п (m)	Сумма вносимых NPK, кг д.в/га	Урожай ($Y_{изм}$), ц/га	Атмосферные осадки, сумма за май-июль, мм	Максимальная суточная температура воздуха, средняя за май-июль, °С	$Y_{расч}$	$(Y_{расч} - Y_{изм})^2$	$Y_{расч}$	$(Y_{расч} - Y_{изм})^2$	$Y_{расч}$	$(Y_{расч} - Y_{изм})^2$	$Y_{расч}$	$(Y_{Ррасч} - Y_{изм})^2$
2005	б/у	1	0	41,5	193	22,4	42,1	0,4	41,2	0,1	42,5	1,0	41,5	0,0
	$P_{40}K_{80}$	2	120	45,3	193	22,4	53,5	67,7	53,6	68,4	53,3	63,6	53,4	65,0
	$P_{40}K_{80} + N_{60}$	3	180	58,0	193	22,4	58,6	0,3	58,4	0,2	58,2	0,0	58,1	0,0
	$P_{40}K_{80} + N_{90}$	4	210	62,5	193	22,4	60,8	2,9	60,5	4,1	60,4	4,3	60,2	5,1
	$P_{40}K_{80} + N_{120}$	5	240	64,5	193	22,4	62,8	2,8	62,3	4,7	62,5	4,0	62,1	5,6
	$P_{80}K_{120} + N_{60}$	6	260	63,4	193	22,4	64,0	0,4	63,4	0,0	63,8	0,1	63,3	0,0
	$P_{80}K_{120} + N_{90}$	7	290	65,0	193	22,4	65,6	0,3	64,9	0,0	65,5	0,3	64,9	0,0
	$P_{80}K_{120} + N_{120}$	8	320	64,6	193	22,4	66,8	5,1	66,2	2,5	67,0	5,9	66,3	2,8
	$P_{120}K_{160} + N_{60}$	9	340	62,2	193	22,4	67,5	28,3	66,9	21,9	67,9	32,4	67,1	23,9
	$P_{120}K_{160} + N_{90}$	10	370	68,9	193	22,4	68,3	0,4	67,7	1,3	69,0	0,0	68,2	0,6
	$P_{120}K_{160} + N_{120}$	11	400	69,4	193	22,4	68,7	0,6	68,4	1,0	69,8	0,1	69,0	0,1
2006	б/у	12	0	39,3	151	23,4	38,3	1,1	37,9	1,9	38,5	0,7	38,1	1,5
	$P_{40}K_{80}$	13	120	46,5	151	23,4	48,7	4,6	49,3	8,1	48,2	2,9	49,0	6,2
	$P_{80}K_{120}$	14	200	52,0	151	23,4	54,6	6,8	55,1	9,6	54,0	4,1	54,7	7,2
	$P_{40}K_{80} + N_{60}$	15	180	57,5	151	23,4	53,2	18,2	53,8	13,7	52,7	23,5	53,4	17,0
	$P_{40}K_{80} + N_{90}$	16	210	58,5	151	23,4	55,3	10,4	55,7	7,8	54,7	14,6	55,3	10,3
	$P_{40}K_{80} + N_{120}$	17	240	61,4	151	23,4	57,1	18,5	57,4	15,9	56,6	23,4	57,0	19,0
	$P_{80}K_{120} + N_{60}$	18	260	62,7	151	23,4	58,2	20,4	58,4	18,2	57,7	24,8	58,1	21,1
	$P_{80}K_{120} + N_{90}$	19	290	60,2	151	23,4	59,6	0,4	59,8	0,2	59,3	0,8	59,6	0,4
	$P_{80}K_{120} + N_{120}$	20	320	53,7	151	23,4	60,8	49,8	60,9	52,5	60,7	48,3	60,8	50,9
	$P_{120}K_{160} + N_{60}$	21	340	61,4	151	23,4	61,4	0,0	61,6	0,0	61,4	0,0	61,6	0,0
	$P_{120}K_{160} + N_{90}$	22	370	62,2	151	23,4	62,0	0,0	62,4	0,0	62,4	0,0	62,6	0,1
	$P_{120}K_{160} + N_{120}$	23	400	59,5	151	23,4	62,4	8,4	63,0	12,2	63,2	13,3	63,4	14,9
2007	б/у	24	0	22,5	344	24,1	23,4	0,8	22,5	0,0	23,2	0,6	22,7	0,0
	$P_{40}K_{80}$	25	120	27,4	344	24,1	29,7	5,5	29,3	3,5	29,1	3,0	29,1	3,0
	$P_{80}K_{120}$	26	200	27,6	344	24,1	33,4	33,4	32,7	25,9	32,6	25,5	32,5	24,2
	$P_{40}K_{80} + N_{60}$	27	180	33,6	344	24,1	32,5	1,1	31,9	2,8	31,8	3,2	31,7	3,4
	$P_{40}K_{80} + N_{90}$	28	210	34,4	344	24,1	33,8	0,4	33,1	1,8	33,0	1,8	32,9	2,3
	$P_{40}K_{80} + N_{120}$	29	240	36,9	344	24,1	34,9	4,0	34,1	8,0	34,2	7,4	33,9	8,8
	$P_{80}K_{120} + N_{60}$	30	260	37,4	344	24,1	35,6	3,4	34,7	7,4	34,9	6,3	34,6	8,0
	$P_{80}K_{120} + N_{90}$	31	290	38,6	344	24,1	36,4	4,7	35,5	9,7	35,8	7,7	35,4	10,1
	$P_{80}K_{120} + N_{120}$	32	320	38,9	344	24,1	37,1	3,1	36,2	7,5	36,7	5,0	36,2	7,4
	$P_{120}K_{160} + N_{60}$	33	340	36,4	344	24,1	37,5	1,2	36,6	0,0	37,1	0,5	36,6	0,1
	$P_{120}K_{160} + N_{90}$	34	370	38,4	344	24,1	37,9	0,2	37,0	1,9	37,7	0,5	37,2	1,4
	$P_{120}K_{160} + N_{120}$	35	400	39,6	344	24,1	38,1	2,1	37,4	4,9	38,2	2,1	37,7	3,7
2008	б/у	36	0	45,8	230	22,1	41,7	17,1	40,8	24,6	42,1	13,4	41,4	19,6
	$P_{40}K_{80}$	37	120	54,0	230	22,1	53,0	1,1	53,1	0,7	52,8	1,4	53,2	0,6
	$P_{80}K_{120}$	38	200	57,0	230	22,1	59,5	6,0	59,3	5,5	59,2	4,8	59,4	5,7
	$P_{80}K_{120} + N_{60}$	39	260	64,8	230	22,1	63,3	2,1	62,9	3,5	63,2	2,4	63,1	2,8
	$P_{80}K_{120} + N_{90}$	40	290	71,1	230	22,1	64,9	38,5	64,4	44,9	65,0	37,7	64,7	41,0
	$P_{80}K_{120} + N_{120}$	41	320	70,8	230	22,1	66,2	21,6	65,6	26,6	66,4	18,9	66,1	22,2

Национальная академия наук Беларуси

Окончание табл. 3

Данные полевого опыта							Результаты расчета по формулам							
Год	Дозы NPK,	№ п/п (m)	Сумма вносимых NPK, кг д.в/га	Урожай ($Y_{изм}$), ц/га	Атмосферные осадки, сумма за май-июль, мм	Максимальная суточная температура воздуха, средняя за май-июль, °С	(7)		(8)		(9)		(10)	
							$Y_{расч}$	$(Y_{расч} - Y_{изм})^2$	$Y_{расч}$	$(Y_{расч} - Y_{изм})^2$	$Y_{расч}$	$(Y_{расч} - Y_{изм})^2$	$Y_{расч}$	$(Y_{Расч} - Y_{изм})^2$
2009	б/у	42	0	28,0	316	22,4	27,8	0,0	29,1	1,3	29,1	1,3	29,8	3,3
	$P_{80}K_{120}$	43	200	34,7	316	22,4	39,7	24,6	42,4	58,6	40,9	38,6	42,8	65,7
	$P_{80}K_{120} + N_{60}$	44	260	42,0	316	22,4	42,2	0,1	44,9	8,5	43,7	2,9	45,5	12,2
	$P_{80}K_{120} + N_{90}$	45	290	43,4	316	22,4	43,3	0,0	46,0	6,6	44,9	2,3	46,6	10,5
	$P_{80}K_{120} + N_{120}$	46	320	42,1	316	22,4	44,1	4,1	46,9	22,6	45,9	14,7	47,6	30,6
2005–2009 гг. Ошибка опыта ($НСР_{05}$), ц/га							**2,0–2,9**							
2005–2009 гг. Ошибка расчета (δ), ц/га							3,1		3,4		3,2		3,5	

Источник: Семененко Н. Н. Торфяно-болотные почвы Полесья: трансформация и пути эффективного использования. Минск: Беларус. навука, 2015. С. 14.

Таблица 4. **Ограничения при использовании формул (7)–(10)**

Table 4. **Limitations for using formulas (7)-(10)**

Показатель	Озимое тритикале	Ячмень
Сумма действующего вещества вносимых за вегетацию минеральных удобрений (NPK), кг д.в/га	0–800	0–500
Сумма атмосферных осадков за май-июль (S), мм	140–400	140–400
Максимальная суточная температура воздуха, средняя за май-июль (T), °С	10–35	10–35

Отметим, что для статистически корректного обеспечения цифровой информацией, исходя из криволинейности форм математической модели урожая (7)–(10), схема полевого агрономического опыта, имеющего целью установление зависимости урожая культуры от урожаеформирующих факторов, должна включать не менее 4 вариантов уровней питания (NPK) с продолжительностью исследований не менее 4 лет. Только в этом случае при обработке результатов опыта можно эффективно использовать математическое моделирование.

В качестве ошибки расчета по формулам (7)–(10) нами приняты стандартные (среднеквадратические) отклонения рассчитанных величин урожаев от урожаев, измеренных в поле. Согласно теории вероятности,

$$\delta = \sqrt[2]{\frac{\left(Y_{расч} - Y_{изм}\right)^2}{m-1}},$$

где δ – ошибка расчета (стандартное отклонение), ц/га; $Y_{расч}$ – вычисленная по формулам величина урожая, ц/га; $Y_{изм}$ – измеренный (фактический) урожай, ц/га; m – количество сравнений урожаев (в опыте с озимым тритикале m = 36 – табл. 2, а в опыте с ячменем m = 46 – табл. 3).

Ошибки расчета по каждой используемой нами форме математической модели урожая озимого тритикале и ячменя приведены в заключительной строке табл. 2, 3. Как видим, по своей величине они превышают ошибки опыта не более, чем в 1,5 раза, т. е. сравнимы с ними, колеблясь в пределах 5–9 % от фактического урожая. Данный результат свидетельствует о достаточно высокой точности предложенных вариантов математической модели урожая. Причем, как показывают результаты сравнения экспоненциальной и параболической зависимостей, используемых в качестве вариантов математической модели урожая, эти варианты приблизительно равноценны по точности.

На рис. 2 приведены графики урожаев озимого тритикале, рассчитанных по параболической зависимости (10), и измеренные в поле урожаи. Взаимное расположение теоретических кривых и опытных точек наглядно подтверждает достаточно высокую точность математической модели, представленной даже в более простой форме. Сравнивая графики на рис. 1, 2, находим подтверждение существенного преимущества использования математического моделирования при обработке опытных данных перед использованием произвольных эмпирических формул.

Национальная академия наук Беларуси

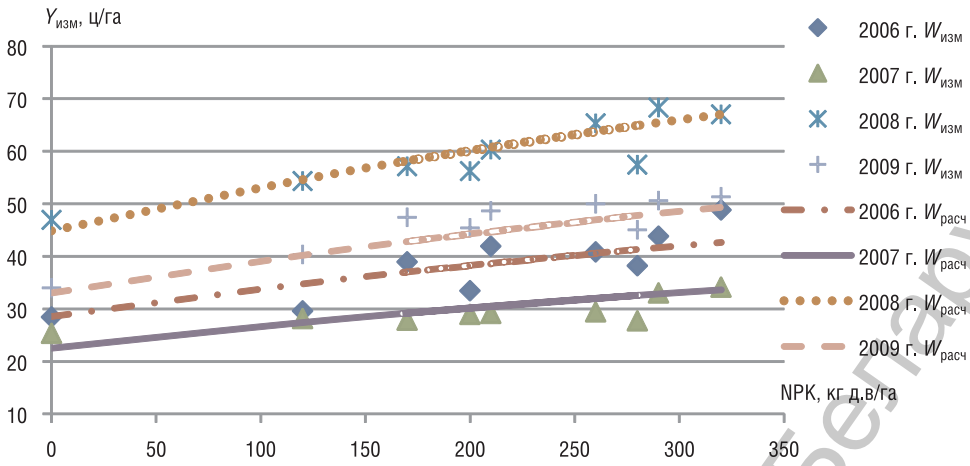

Рис. 2. Связь урожая озимого тритикале с дозами вносимых удобрений и увлажненностью вегетационного периода согласно результатам расчета по формуле (10)

Fig. 2. Correlation of winter triticale yield with doses of fertilizers and moisture content during growing season according to the results of calculation using formula (10)

На рис. 3 приведено сравнение измеренных и рассчитанных по формуле (10) урожаев озимого тритикале, иллюстрирующее достаточно высокую точность данного варианта математической модели урожая.

С увеличением числа учитываемых урожаеформирующих факторов с двух (NPK, S) до трех (NPK, S, T_{max}) ошибка расчета снижается с 3,0 до 2,8 ц/га, т. е. точность расчета величины урожая повышается, но несущественно (рис. 4).

В заключение укажем, что рассматриваемые урожаеформирующие факторы по своему воздействию на урожай зерновых культур в условиях Беларуси располагаются в следующей убывающей последовательности (NPK → S → T_{max}).

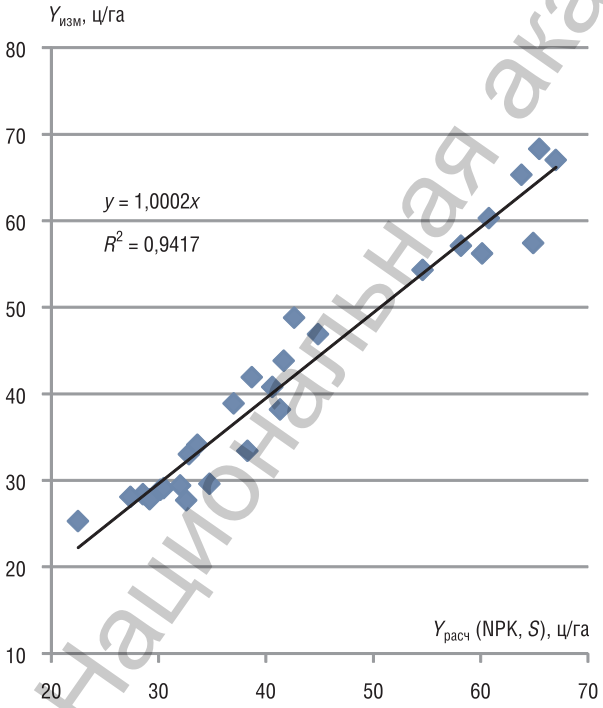

Рис. 3. Сравнение рассчитанных по формуле (10) и измеренных урожаев озимого тритикале [19]

Fig. 3. Comparison of winter triticale yield calculated by formula (10) and measured [19]

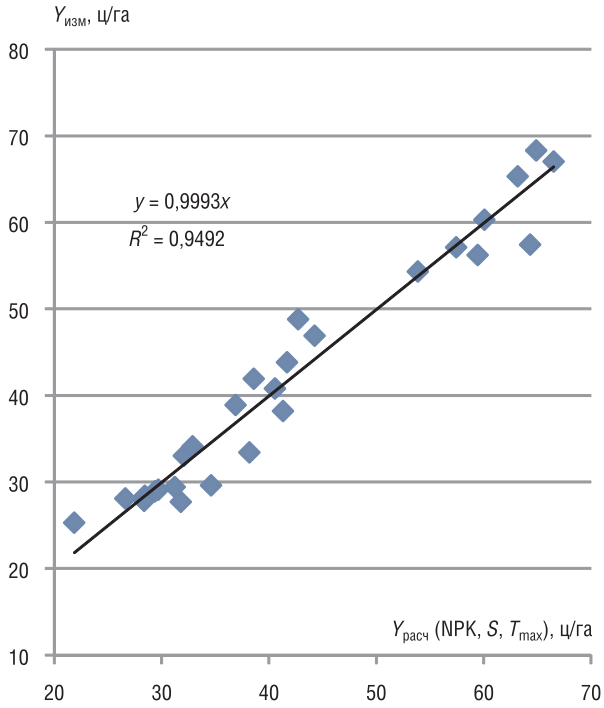

Рис. 4. Сравнение рассчитанных по формуле (8) и измеренных урожаев озимого тритикале [19]

Fig. 4. Comparison of winter triticale yield calculated by formula (8) and measured [19]

Национальная академия наук Беларуси

Выводы

1. Исходные положения, использованные при разработке математической модели урожая, не связаны с особенностями сельскохозяйственных культур и условий их возделывания, поэтому математическая модель, представленная в виде криволинейных функций (экспонента, парабола), универсальна по применению и действительна для любой культуры.

2. Схема полевого агрономического опыта, имеющего целью установление зависимости урожая культуры от урожаеформирующих факторов, должна включать не менее 4 вариантов уровней питания (NPK) с продолжительностью исследований не менее 4 лет (4 вариантов увлажнения и теплообеспеченности вегетации). Только в этом случае при обработке результатов опыта можно корректно и эффективно использовать математическое моделирование.

3. В условиях Беларуси урожаеформирующие факторы по результату своего воздействия на урожай зерновых культур располагаются в следующей убывающей последовательности: удобрительный фон (суммарная доза вносимых действующих веществ макроудобрений) → сумма выпавших за установленный период (май-июль) атмосферных осадков → максимальная за сутки температура воздуха, средняя за установленный период (май-июль).

4. С увеличением числа учитываемых урожаеформирующих факторов соответствующий им в расчетных формулах максимум урожая возрастает.

5. Увеличение числа контролируемых и учитываемых в математической модели урожаеформирующих факторов от 2 (пища и влага) до 3 (пища, влага и тепло) повышает точность моделирования урожая зерновых культур несущественно.

Благодарности. Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований «Сельскохозяйственные технологии и продовольственная безопасность», подпрограмма «Плодородие почв и защита растений».

Список использованных источников

1. *Красовский, Г. И.* Планирование эксперимента : учеб. пособие / Г. И. Красовский, Г. Ф. Филаретов. – Минск : Изд-во БГУ, 1982. – 302 с.

2. *Аверьянов, С. Ф.* Некоторые математические модели системы «растение – среда» / С. Ф. Аверьянов, В. В. Шабанов // Физическое и математическое моделирование в мелиорации / под ред. С. Ф. Аверьянова. – М., 1973. – С. 293–295. – (Научные труды / ВАСХНИЛ, Отд-ние гидротехники и мелиорации).

3. *Балакай, Г. Т.* Научные основы возделывания сои на орошаемых землях Северного Кавказа : автореф. дис. … д-ра с.-х. наук : 06.01.02 / Г. Т. Балакай ; Новочеркас. гос. мелиоратив. акад. – Новочеркасск, 2000. – 51 с.

4. *Ткачева, О. А.* Дифференцированные режимы орошения и нормы удобрений капусты на обыкновенных черноземах Ростовской области : автореф. дис. … канд. с.-х. наук : 06.01.02 / О. А. Ткачева ; Новочеркас. гос. мелиоратив. акад. – Новочеркасск, 2001. – 24 с.

5. *Цекоева, Ф. К.* Рационализация водопользования на оросительных системах Северной Осетии в условиях ограниченных ресурсов : автореф. дис. … канд. с.-х. наук : 06.01.02 / М. Г. Цекоева ; Новочеркас. гос. мелиоратив. акад. – Новочеркасск, 2001. – 24 с.

6. *Грибанова, М. Г.* Технология орошения яблони в условиях ограниченных ресурсов : автореф. дис. … канд. техн. наук : 06.01.02 / М. Г. Грибанова ; Новочеркас. гос. мелиоратив. акад. – Новочеркасск, 2001. – 26 с.

7. *Матиев, А. К.* Дифференцированные режимы орошения и минерального питания кукурузы на обыкновенных черноземах предгорной зоны Республики Ингушетия : автореф. дис. … канд. с.-х. наук : 06.01.02 / А. К. Матиев ; Новочеркас. гос. мелиоратив. акад. – Новочеркасск, 2006. – 24 с.

8. *Сухарев, В. И.* Водобалансовое и природоохранное обоснование мелиоративных мероприятий в агроландшафтах Центрально-Черноземного региона : автореф. дис. … д-ра с.-х. наук : 06.01.02 / В. И. Сухарев ; Кур. гос. с.-х. акад. – Курск, 2006. – 45 с.

9. *Жихарев, А. Г.* Режим орошения и удобрение сои в условиях Волго-Донского междуречья Волгоградской области : автореф. дис. … канд. с.-х. наук : 06.01.02 / А. Г. Жихарев. – Волгоград, 2009. – 25 с.

10. *Зуева, И. Н.* Агробиологические особенности выращивания риса при дождевании в условиях юга Амурской области : автореф. дис. … канд. с.-х. наук : 06.01.02 / И. Н. Зуева. – Волгоград, 2009. – 20 с.

11. *Давыдов, И. А.* Дифференцированный режим орошения и водопотребления баклажана в условиях Волго-Донского междуречья : автореф. дис. … канд. с.-х. наук : 06.01.02 / И. А. Давыдов. – Волгоград, 2009. – 23 с.

12. *Маковкина, Л. Н.* Режимы орошения и дозы внесения удобрений для получения планируемой урожайности лука на светло-каштановых почвах Волго-Донского междуречья : автореф. дис. … канд. с.-х. наук : 06.01.02 / Л. Н. Маковкина. – Волгоград, 2009. – 23 с.

13. *Донгузова, Ю. В.* Режим орошения гречихи в пожнивных посевах на светло-каштановых почвах Волго-Донского междуречья : автореф. дис. … канд. с.-х. наук : 06.01.02 / Ю. В. Донгузова. – Волгоград, 2009. – 23 с.

14. *Машарова О. В.* Режим орошения и удобрения баклажанов при поливе дождеванием на светло-каштановых почвах Волго-Донского междуречья : автореф. дис. … канд. с.-х. наук : 06.01.02 / О. В. Машарова. – Волгоград, 2011. – 23 с.

Национальная академия наук Беларуси

15. *Шенцева, Е. В.* Совершенствование агротехники выращивания баклажан при капельном орошении с использованием тоннельных укрытий для получения ранней продукции : автореф. дис. … канд. с.-х. наук : 06.01.01 ; 06.01.02 / Е. В. Шенцева. – Саратов, 2012. – 22 с.

16. *Богданенко, М. П.* Технология возделывания рассадного лука при капельном орошении в Нижнем Поволжье : автореф. дис. … канд. с.-х. наук : 06.01.01 ; 06.01.02 / М. П. Богданенко. – Саратов, 2012. – 23 с.

17. *Валге, А. М.* Математическое моделирование урожайности многолетних трав / А. М. Валге, Э. А. Папушин, А. Н. Перекопский // Вестн. Рос. акад. с.-х. наук. – 2013. – № 5. – С. 8–10.

18. *Прошкин, В. А.* Моделирование эффективности минеральных удобрений по показателям агрохимических свойств почвы / В. А. Прошкин // Агрохимия. – 2012. – № 7. – С. 16–27.

19. *Семененко, Н. Н.* Торфяно-болотные почвы Полесья: трансформация и пути эффективного использования / Н. Н. Семененко. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 282 с.

20. *Степуро, М. Ф.* Использование методов математического моделирования при оценке систем удобрений и оптимизации минерального питания свеклы столовой / М. Ф. Степуро // Овощеводство = Vegetable growing : сб. науч. тр. / Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т овощеводства.– Минск, 2012. – Т. 20. – С. 245–254.

21. *Степуро, М. Ф.* Использование методов математического моделирования при оптимизации систем удобрения моркови / М. Ф. Степуро // Картофель и овощи. – 2013. – № 1. – С. 19–21.

22. Абнормальные формы функции отклика «удобрения – продуктивность»: полевые наблюдения и модельный анализ / А. Г. Топаж [и др.] // Изв. ТСХА. – 2015. – Вып. 2. – С. 15–27.

23. *Ушакова, Е. В.* Технологические приемы возделывания различных сортов сои при капельном орошении в засушливых условиях Нижнего Поволжья : автореф. дис. … канд. с.-х. наук : 06.01.01 ; 06.01.02 / Е. В. Ушакова. – Саратов, 2015. – 23 с.

24. *Шаповалов, Н. К.* Математическое моделирование управления продукционным процессом на посевах сахарной свеклы / Н. К. Шаповалов, И. Е. Солдат // Достижения науки и техники АПК. – 2013. – № 2. – С. 29–31.

25. *Акулинина, М. А.* Капельное орошение огурца в сухостепной зоне светло-каштановых почв Нижнего Поволжья : автореф. дис. … канд. с.-х. наук : 06.01.02 / М. А. Акулинина. – Волгоград, 2010. – 23 с.

26. *Мартынова, А. А.* Совершенствование агротехнических приемов возделывания моркови на светло-каштановых почвах Нижнего Поволжья : автореф. дис. … канд. с.-х. наук : 06.01.01 / М. А. Акулинина. – Волгоград, 2010. – 19 с.

27. *Вахонин, Н. К.* Концептуальные основы моделирования урожайности в системе принятия решений по регулированию водного режима / Н. К. Вахонин // Мелиорация. – 2014. – № 2 (72). – С. 7–15.

28. *Вахонин, Н. К.* Моделирование урожаев в системе точного земледелия / Н. К. Вахонин // Мелиорация. – 2015. – № 1 (73). – С. 131–136.

29. *Дмитренко, В. П.* Оценка влияния температуры воздуха и осадков на формирование урожая основных зерновых культур : метод. пособие / В. П. Дмитренко ; под ред. Н. И. Гойсы, Н. Ф. Цупенко. – Л. : Гидрометеоиздат, 1976. – 49 с.

30. *Лихацевич, А. П.* Использование математического моделирования для повышения достоверности оценки результатов полевого агрономического опыта / А. П. Лихацевич // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. аграр. навук. – 2018. – Т. 56, № 3. – С. 321–334. https://doi.org/10.29235/1817-7204-2018-56-3-321-334

31. *Лихацевич, А. П.* Моделирование влияния регулируемых факторов среды на урожайность сельскохозяйственных культур / А. П. Лихацевич // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. аграр. навук. – 2016. – № 4. – С. 65–78.

References

1. Krasovskii G. I., Filaretov G. F. *Planning an experiment*. Minsk, Publishing house of the Belarusian State University, 1982. 302 p. (in Russian).

2. Aver'yanov S. F., Shabanov V. V. Some mathematical models of the plant-environment system. *Fizicheskoe i matematicheskoe modelirovanie v melioratsii* [Physical and mathematical modeling in land reclamation]. Moscow, 1973, pp. 293-295 (in Russian).

3. Balakai G. T. *Scientific bases of soybean cultivation on irrigated lands of the North Caucasus*. Abstract of Ph.D. diss. acad. Novocherkassk, 2000. 51 p. (in Russian).

4. Tkacheva O. A. *Differentiated irrigation regimes and fertilization rates for cabbage on ordinary chernozems of the Rostov region*. Abstract of Ph.D. diss. Novocherkassk, 2001. 24 p. (in Russian).

5. Tsekoeva F. K. *Rationalization of water use in the irrigation systems of North Ossetia in the conditions of limited resources*. Abstract of Ph.D. diss. Novocherkassk, 2001. 24 p. (in Russian).

6. Gribanova M. G. *Technology of apple irrigation in the conditions of limited resources*. Abstract of Ph.D. diss. Novocherkassk, 2001. 26 p. (in Russian).

7. Matiev A. K. *Differentiated regimes of irrigation and mineral nutrition of corn on ordinary chernozems of the foothill zone of the Republic of Ingushetia*. Abstract of Ph.D. diss. Novocherkassk, 2006. 24 p. (in Russian).

8. Sukharev V. I. *Water balance and nature conservation substantiation of reclamation measures in agricultural landscapes of the Central Black Earth region*. Abstract of Ph.D. diss. Kursk, 2006. 45 p. (in Russian).

9. Zhikharev A. G. *Irrigation regime and fertilization of soybeans in the conditions of the Volga-Don interfluve of the Volgograd region*. Abstract of Ph.D. diss. Volgograd, 2009. 25 p. (in Russian).

10. Zueva I. N. *Agrobiological features of rice cultivation with sprinkling in the south of the Amur region*. Abstract of Ph.D. diss. Volgograd, 2009. 20 p. (in Russian).

11. Davydov I. A. *Differentiated regime of irrigation and water consumption of eggplant in the conditions of the Volga-Don interfluve*. Abstract of Ph.D. diss. Volgograd, 2009. 23 p. (in Russian).

Национальная академия наук Беларуси

12. Makovkina L. N. *Irrigation regimes and fertilization doses to obtain the planned yield of onions on light chestnut soils of the Volga-Don interfluve*. Abstract of Ph.D. diss. Volgograd, 2009. 23 p. (in Russian).

13. Donguzova Yu. V. *Buckwheat irrigation regime in stubble crops on light chestnut soils of the Volga-Don interfluve*. Abstract of Ph.D. diss. Volgograd, 2009. 23 p. (in Russian).

14. Masharova O. V. *Regime of irrigation and fertilization of eggplants during sprinkler irrigation on light chestnut soils of the Volga-Don interfluve*. Abstract of Ph.D. diss. Volgograd, 2011. 23 p. (in Russian).

15. Shentseva E. V. *Improvement of agricultural technology for growing eggplant with drip irrigation using tunnel shelters for early production*. Abstract of Ph.D. diss. Saratov, 2012. 22 p. (in Russian).

16. Bogdanenko M. P. *Technology of cultivation of seedling onions with drip irrigation in the Lower Volga region*. Abstract of Ph.D. diss. Saratov, 2012. 23 p. (in Russian).

17. Valge A. M., Papushin E. A., Perekopskiy A. N. Mathematical modeling of cropping power in perennial grasses. *Vestnik Rossiiskoi akademii sel'skokhozyaistvennykh nauk* [Bulletin of the Russian Academy of Agricultural Sciences], 2013, no. 5, pp. 8-10 (in Russian).

18. Proshkin V. A. Simulation of the efficiency of mineral fertilizers on the basis of agrochemical soil properties. *Agrokhimiya* [Agrochemistry], 2012, no. 7, pp. 16-27 (in Russian).

19. Semenenko N. N. *Peat-bog soils of Polesie: transformation and ways of effective use*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2015. 282 p. (in Russian).

20. Stepuro M. F. Application of methods of mathematical modelling in estimation of fertilizer systems and optimization of mineral nutrition of table beet. *Ovoshchevodstvo: sbornik nauchnykh trudov = Vegetable growing: collection of scientific papers*. Minsk, 2012, vol. 20, pp. 245-254 (in Russian).

21. Stepuro M. F. Use of mathematical simulation methods for optimization of carrots fertilizing system. *Kartofel' i ovoshchi = Potato and Vegetables*, 2013, no. 1, pp. 19-21 (in Russian).

22. Topazh A. G., Lekomtsev P. V., Pasynkov A. V., Pukhovskiy A. V. Abnormal forms of the response "fertilizer - productivity": field experiments and simulation analysis. *Izvestiya Timiryazevskoi sel'skokhozyaistvennoi akademii = Izvestiya of Timiryazev Agricultural Academy*, 2015, iss. 2, pp. 15-28 (in Russian).

23. Ushakova E. V. *Technological methods of cultivation of various varieties of soybeans with drip irrigation in arid conditions of the Lower Volga region*. Abstract of Ph.D. diss. Saratov, 2015. 23 p. (in Russian).

24. Shapovalov N. K., Soldat I. E. Mathematical modeling of the process on produtsionnym sugar beet. *Dostizheniya nauki i tekhniki APK = Achievements of Science and Technology of AIC*, 2013, no. 2, pp. 29-31 (in Russian).

25. Akulinina M. A. *Drip irrigation of cucumber in the dry steppe zone of light chestnut soils of the Lower Volga region*. Abstract of Ph.D. diss. Volgograd, 2010. 23 p. (in Russian).

26. Martynova A. A. *Improvement of agrotechnical methods of carrot cultivation on light chestnut soils of the Lower Volga region*. Abstract of Ph.D. diss. Volgograd, 2010. 19 p. (in Russian).

27. Vakhonin N. K. Conceptual bases of yield modeling in the decision–making system concerning water regime regulation. *Melioratsiya* [Land Reclamation], 2014, no. 2 (72), pp. 7-15 (in Russian).

28. Vakhonin N. K. Yield modeling in the system of precision farming. *Melioratsiya* [Land Reclamation], 2015, no. 1 (73), pp. 131-136 (in Russian).

29. Dmitrenko V. P. *Assessment of the influence of air temperature and precipitation on yield formation of the main grain crops*. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1976. 49 p. (in Russian).

30. Likhatsevich A. P. Mathematical simulation for improvement of reliability of evaluation of the field agronomic experiment results. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya agrarnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Agrarian series*, 2018, vol. 56, no. 3, pp. 321-334 (in Russian). https://doi.org/10.29 235/1817-7204-2018-56-3-321-334

31. Likhatsevich A. P. Modeling the effect of controlled environmental factors on crop yield. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya agrarnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Agrarian series*, 2016, no. 4, pp. 65-78 (in Russian).

Информацмя об авторе

Лихацевич Анатолий Павлович – член-корреспондент, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник. Институт мелиорации, Национальная академия наук Беларуси (ул. М. Богдановича, 153, Минск, 200040, Республика Беларусь). E-mail: alikhatsevich@mail.ru

Information about the author

Anatoly P. Likhatsevich - Corresponding Member, D.Sc. (Engineering), Professor. The Institute of Land Reclamation, the National Academy of Sciences of Belarus (153 M. Bogdanovicha Str., 220040 Minsk, Republic of Belarus). E-mail: alikhatsevich@mail.ru

Национальная академия наук Беларуси